# Aula 27: Espaços de Baire

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

$1^o$ **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

A noção de um espaço de Baire é um conceito importante e que tem consequências em diversas situações - por exemplos, alguns resultados de cursos de análise funcional são consequências dos espaços em questão serem de Baire.

Aqui vamos apresentar a definição e alguns resultados básicos. Na sequência, vamos apresentar um exemplo de jogo topológico que dá uma caracterização para tal propriedade.

Intersecção de dois densos não precisa ser densa (ver lista de exercício). Mas se tivermos uma família em que cada denso é também aberto, qualquer interseção finita também é densa (ver lista de exercícios).

Espaços de Baire são aqueles que podemos repetir esse processo para famílias enumeráveis.

### Definição 1

*Dizemos que $(X, \tau)$ é um Espaço de Baire se para toda família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos em $X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é denso em $X$.*

Nosso primeiro exemplo de espaços de Baire são os compactos de Hausdorff.

**Teorema 2 (Teorema de Baire, para compactos)**

*Seja $(X, \tau)$ um compacto de Hausdorff. Então $(X, \tau)$ é de Baire.*

Demonstração. Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos e $V \neq \emptyset$ um aberto. Vamos mostrar que $V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$. Para tanto, vamos construir uma sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos não vazios tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$ :

(a) $\overline{V_1} \subset V$;

(b) $\overline{V_n} \subset A_n$;

(c) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$.

Como $A_1 \cap V$ é um aberto não vazio, existe $x_1 \in A_1 \cap V$. Por $X$ ser regular (pois é compacto e de Hausdorff), existe $V_0$ aberto tal que $x_1 \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset A_1 \cap V$. Note que temos satisfeitos os itens (a), (b) e (c) acima (o último por vacuidade).

Suponha definidos $V_k$, para $k = 1, \ldots, n$, satisfazendo as condições impostas acima.

Definamos $V_{n+1}$. Como $V_n \cap A_{n+1}$ é aberto não vazio, existe $x_{n+1} \in V_n \cap A_{n+1}$. Novamente, pela regularidade de $X$, existe $V_{n+1}$ aberto tal que $x_{n+1} \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap A_{n+1}$, que claramente satisfaz (b) e (c). Isto encerra a indução.

Note que a família $\left(\overline{V_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de fechados com a propriedade da intersecção finita (devido à condição (c) — Exercício 6 da Aula 15), num espaço compacto. Logo, existe $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$.

Por (a) e (b), $x \in V \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

## Teorema 3 (Teorema de Baire, para localmente compactos)

*Seja $(X, \tau)$ um de Hausdorff localmente compacto. Então $(X, \tau)$ é de Baire.*

Demonstração: Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de abertos densos e $V \neq \emptyset$ um aberto. Vamos mostrar que $V \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$. Pelo exercício 17 da aula 15, existe $(Y, \sigma)$ uma compactificação de Alexandrov de $(X, \tau)$ — isto é, $X$ é denso em $(Y, \sigma)$, $(Y, \sigma)$ é compacto, Hausdorff e $\tau \subset \sigma$.

Assim, $A_n$ são abertos e densos $Y$ e $V \neq \emptyset$ é um aberto de $Y$. Pelo teorema anterior temos $V \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$.

Outro exemplo importante de espaços de Baire são os espaços métricos completos.

## Teorema 4 (Teorema de Baire, para métricos completos)

*Seja $(X, d)$ espaço métrico completo. Então $(X, d)$ é um espaço de Baire.*

Demonstração. Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos e $V$ um aberto não vazio. Vamos mostrar que $V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$. Para tanto, vamos construir uma sequência de bolas abertas $(B_{r_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tais que:

(a) $r_n \searrow 0$;

(b) $\overline{B_{r_1}(x_0)} \subset V$;

(c) $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset A_n$;

(d) $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n)$.

Como $A_1 \cap V$ é aberto não vazio, existem $x_1 \in A_1 \cap V$ e $r_1 \in (0, 1)$ tais que $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset A_1 \cap V$ (o que é possível pela regularidade de $(X, d)$ ).

Note que todas as condições impostas acima são satisfeitas. Suponha definidos $B_{r_k}(x_k)$ para $k = 1, \ldots, n$, satisfazendo as condições (a), (b), (c) e (d).

Por termos que $B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$ é aberto não vazio, existem $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$ e $x_{n+1}$ tais que $x_{n+1} \in B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$. Claramente as condições impostas acima são satisfeitas.

Segue, por construção, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como $(X, d)$ é métrico completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

Note que $x \in \overline{B_{r_k}(x_k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ : de fato, $(x_n)_{n \geq k}$ é uma sequência de pontos de $\overline{B_{r_k}(x_k)}$ que converge para $x$. Logo, $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_{r_k}(x_k)}$ e, portanto, $x \in V \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$. Com isso, podemos provar o seguinte resultado (tomando-se o cuidado de escolher a métrica certa).

## Corolário 5

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *é um espaço de Baire.*

Demonstração. Segue de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ser completamente metrizável e do fato de que "ser de Baire" é um invariante topológico.

Também obtemos uma forma indireta de provar que não existe uma métrica completa equivalente a usual nos racionais.

## Corolário 6

$\mathbb{Q}$ *não é completamente metrizável.*

Demonstração. Note que, para cada $q \in \mathbb{Q}, A_q = \mathbb{Q} \backslash \{q\}$ é um aberto denso em $\mathbb{Q}$. Contudo, observe que $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} A_q = \emptyset$. Logo, $\mathbb{Q}$ não é de Baire (e, portanto, não pode ser completamente metrizável).

De forma mais indireta ainda, obtemos que os racionais não formam um $G_\delta$ em $\mathbb{R}$.

## Corolário 7

*$\mathbb{Q}$ não é um $G_\delta$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\mathbb{Q}$ fosse um $G_\delta$, ele seria completamente metrizável (Teorema 8 da Aula 26).

Vimos que se $X$ é completamente metrizável ou se é localmente compacto e de Hausdorff, obtemos que $X$ é de Baire.

Vamos terminar esta seção mostrando que essas condições não são necessárias.

## Proposição 8

*A reta de Sorgenfrey ($\mathbb{R}_S$) é um espaço de Baire mas não é localmente compacto nem completamente metrizável.*

Demonstração. Já vimos que $\mathbb{R}_S$ e Hausdorff e não é localmente compacto (Exercício 16 da Aula 15) e, claramente, $\mathbb{R}_S$ não é completamente metrizável já que nem é metrizável (pois é separável e não tem base enumerável - Exemplo 18 da Aula 5).

Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S$ é de Baire.

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos em $\mathbb{R}_S$.

Afirmação: Se $A$ é aberto denso em $\mathbb{R}_S$, então $A$ contém um aberto denso em $\mathbb{R}$.
Demonstração. Note que podemos escrever $A = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i)$. Considere $A' = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ e note que $A'$ é aberto em $\mathbb{R}$ e que $A' \subset A$.

Vamos mostrar que $A'$ é denso em $\mathbb{R}$.

Para isso, basta provarmos que, dados $a < b$, temos que $(a, b) \cap A' \neq \emptyset$.

Note que $(a, b)$ é aberto em $\mathbb{R}_S$. Logo, $(a, b) \cap A \neq \emptyset$. Seja $i \in I$ tal que $(a, b) \cap [a_i, b_i) \neq \emptyset$.

Note que, assim, $(a, b) \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$ o que implica que $(a, b) \cap A' \neq \emptyset$, como queríamos.

Seja $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que cada $A'_n \subset A_n$ e $A'_n$ é aberto denso em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é de Baire (pois é métrico completo), $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n$ é denso em $\mathbb{R}$ e, portanto, denso em $\mathbb{R}_S$ (ver o Exercício 7 a seguir). Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A'_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, temos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso em $\mathbb{R}_S$.

Assim, $\mathbb{R}_S$ é de Baire.

# Exercícios

1. Dê um exemplo de um espaço com dois densos disjuntos.
2. Mostre que a intersecção finita de abertos densas é densa.
3. Dizemos que $Y \subset X$ é um conjunto raro se, Int $\bar{A} = \emptyset$. Dizemos que $Z \subset X$ é um conjunto magro se existe uma família $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos raros em $X$ tal que $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Alternativamente, dizemos que um conjunto magro é um conjunto de primeira categoria e todo conjunto não magro é dito um conjunto de segunda categoria.
   (a) Mostre que $Y \subset X$ é raro em $X$ se, e somente se, $X \backslash \bar{Y}$ é denso em $X$.
   (b) (Teorema de Baire em termos de Categoria) Mostre que todo espaço de Baire é de segunda categoria.
4. Dê um exemplo de um espaço enumerável de segunda categoria. Como são os conjuntos raros neste exemplo?
5. Dê um exemplo de um conjunto que pode ser escrito como união enumerável de $G_\delta$ 's mas que não seja ele próprio um $G_\delta$.
6. Sejam $Y \subset X$ espaços topológicos (com $Y$ com a topologia de subespaço). Seja $R \subset Y$ raro (em $Y$ ). Mostre que $R$ é raro em X.
7. Mostre que a reta real e a reta de Sorgenfrey tem os mesmos densos.

8. Mostre que a condição “ser de Hausdorff” é necessária para mostrar que todo compacto é de Baire.
9. Mostre que todo espaço enumerável $T_1$, sem pontos isolados não é de Baire ( $x$ é um ponto isolado se $\{x\}$ é aberto).
10. Mostre que todo subespaço aberto não vazio de $\mathrm{um}$ espaço de Baire é um espaço de Baire.
11. Seja $(X, \tau)$ um espaço de Baire se seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma familia de abertos densos em $X$. Mostre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é um espaço de Baire.
12. Mostre que o plano de Niemytski é de Baire.
13. Mostre que não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ contínua e bijetora.

Vamos apresentar nessa seção um exemplo de jogo topológico - na verdade, o mais velho deles.

### Definição 9

*Dado um espaço topológico* $(X, \tau)$*, vamos chamar de jogo de Banach-Mazur o jogo entre dois jogadores: ALICE e BETO. Na rodada 1 , ALICE joga* $A_1$ *um aberto não vazio. Então BETO joga* $B_1 \subset A_1$ *também aberto não vazio. Numa rodada n qualquer, ALICE joga* $A_n \subset B_{n-1}$ *aberto não vazio e BETO joga* $B_n \subset A_n$*, também aberto não vazio. Depois de todas as rodadas, ALICE é declarada a vencedora se* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$*. BETO é declarado o vencedor caso contrário.*

Começamos com um caso caso simples:

## Proposição 10

*Seja $(X, \tau)$ um espaço compacto de Hausdorff. Então BETO tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur.*

Demonstração. Seja $A_1$ a primeira jogada de ALICE. Como $A_1 \neq \emptyset$, existe $x \in A_1$. Como $X$ é compacto de Haurdorff, $X$ é regular e, portanto, existe $V$ aberto tal que $x \in V \subset \bar{V} \subset A_1$. Defina $B_1$ como sendo $V$.

Numa rodada $n$ qualquer, dada $A_n$ a jogada de ALICE, repita o processo acima: considere $x \in A_n$ e tome $B_n$ um aberto tal que $x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset A_n$.

Vamos provar que jogando assim, BETO vence.

Note que, para qualquer $n$, $\overline{B_{n+1}} \subset A_{n+1} \subset B_n$. Assim, $\left(\overline{B_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de compactos não vazios.

Portanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, o que garante vitória para BETO.

Um dos interesses nesse jogo é a sua relação com a propriedade de Baire: o espaço é de Baire se, e somente se, ALICE não tem uma estratégia vencedora.

Vamos mostrar um dos lados dessa equivalência e o outro ficará como exercício.

## Proposição 11

*Se ALICE não tem uma estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur, então o espaço é de Baire. De forma equivalente: Se o espaço não é de Baire, então ALICE tem estratégia vencedora.*

Demonstração. Suponha que o espaço não seja de Baire. Então existem $V$ aberto não vazio e $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abertos densos tais que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \emptyset$.

Vamos definir uma estratégia vencedora para ALICE.

# O jogo de Banach-Mazur

Considere $A_1 = V \cap W_1$ (note que isso é uma jogada válida, pois é um aberto não vazio). Então BETO responde com $B_1$, um aberto não vazio. Defina

$$A_2 = B_1 \cap W_2$$

Novamente, essa é uma jogada válida pela densidade de $W_2$. Em geral, na rodada $n$, Alice joga

$$A_n = B_{n-1} \cap W_n$$

Note que jogando assim, ALICE vence, já que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \emptyset$ .

**Proposição 12**

*Se o espaço é de Baire, então ALICE não tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur.*

Demonstração: Ver notas do Leandro.

### Corolário 13

*O espaço ser de Baire é equivalente a ALICE não ter estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur.*

Se um espaço $X$ é tal que BETO tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur, então BETO também tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur jogado em $X \times X$ (veja o Exercício 4 a seguir). Note que isso implica que o espaço $X \times X$ também é de Baire - como BETO tem estratégia vencedora, Alice não tem.

Por outro lado, existem exemplos de espaços de Baire $X$ tais que $X \times X$ não é de Baire. Assim, um espaço $X$ desta forma é um espaço onde nenhum dos dois jogadores tem estratégia vencedora: ALICE não tem pois $X$ é de Baire e BETO não tem pois (se tivesse, também teria em $X \times X$, ALICE não teria em $X \times X$, e $X \times X$ seria de Baire) $X \times X$ não é de Baire.

Cohen, Paul E.

Products of Baire spaces.

Proc. Amer. Math. Soc.55(1976), no.1, 119–124.

Review: A topological space is said to be Baire if any countable intersection of its dense open sets is dense. Assuming the continuum hypothesis (CH), J. C. Oxtoby [Fund. Math. 49 (1960/61), 157–166; MR0140638; errata, MR 26, p. 1543] constructed a Baire space whose square is not Baire. The author shows that the assumption of CH is unnecessary here. The spaces considered in this paper are partially ordered $(P, \leq))$ with topology generated by the initial segments. The construction of the desired Baire space with non-Baire product is based on the study of P as a set of forcing conditions, as outlined by R. M. Solovay [Ann. of Math. 92 (1970), 1–56; MR0265151].

# Exercícios - O jogo de Banach-Mazur

1. Na definição do jogo de Banach-Mazur, note que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
2. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma família maximal de abertos dois a dois disjuntos, então $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ é aberto denso.
3. Mostre que se $(X, d)$ é um espaço métrico completo, então BETO tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur.
4. Mostre que BETO tem estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur jogado tanto no espaço $X$ como no espaço $Y$, então BETO tem também estratégia vencedora se jogar em $X \times Y$.