UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

12 de junho

Lista de Exercícios N° 4

Teorema do valor intermediário e de Weierstrass

1. Se $f(x) = x^2 + 10\sin x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1000$.
2. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

   a) $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$

   b) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$

   c) $e^x = 3 - 2x$, $(0, 1)$

   d) $\sin x = x^2 - x$, $(1, 2)$

3. Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.

   a) $\cos x = x^3$.

   b) $\ln x = 3 - 2x$.

4. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$

   a) Prove que $f(1)$ é o valor máximo de f.

   b) Prove que existe $x_1 \in (-1, 0)$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f.

Valores Máximo e Mínimo

1. Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f

   a) $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$, $x \leq 3$

   b) $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x$, $x \geq -2$

   c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

   d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 < x < 3$

   e) $f(x) = \sin x$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

   f) $f(x) = \cos x$, $-3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$

   g) $f(x) = \ln x$, $0 < x \leq 2$

   h) $f(x) = |x|$

   i) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

2. Encontre os números críticos da função

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

12 de junho

Lista de Exercícios N° 4

---

a) $f(x) = 5x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36$

d) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

e) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

f) $g(x) = |3x - 4|$

g) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$

h) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}$

i) $h(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$

j) $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

k) $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$

3. Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

c) $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[0.2, 4]$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0, 3]$

f) $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}$, $[-1, 2]$

g) $f(t) = 2\cos t + \sin 2t$, $[0, \pi/2]$

h) $f(x) = xe^{-x^2/8}$, $[-1, 4]$

i) $f(x) = x - \ln x$, $[\frac{1}{2}, 2]$

j) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

4. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários)

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

e) $y = x + \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

g) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

h) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

i) $y = 2 - e^{-x}$

j) $y = e^{-x^2}$

k) $f(x) = e^{2x} - e^x$

l) $g(x) = e^{1/x}$

m) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

n) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

o) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

p) $g(x) = x - e^x$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

12 de junho

Lista de Exercícios N° 4

O Teorema do Valor Médio

1. Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

   a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$
   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$
   c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$
   d) $h(x) = \cos 2x$, $[\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$

2. Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

   a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $[0, 2]$.
   b) $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$.
   c) $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$.
   d) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $[1, 4]$.

3. Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

   a) $2x + \cos x = 0$.
   b) $x^3 + e^x = 0$.

4. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.
5. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.
6. a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem, no máximo, três raízes reais.
   b) Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.

7. Suponha que f seja uma função ímpar e é derivável em toda parte. Demonstre que para todo o número positivo b, existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.
8. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \text{ para todo } a, b.$$

9. Ás 14 h da tarde o velocímetro do carro mostra 50 km/h. Às 14 h 10, ele mostra 65 km/h. Prove que em algum momento entre 14 h e 14 h 10 a aceleração era exatamente de 90km/h^2

10. Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade. [Dica: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde $g(t)$ e $h(t)$ são as duas posições dos corredores.]

Regra de l'Hôspital

1. Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$

c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\sin t}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\tan 2x)^x$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

2. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

onde c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

Gráfico de uma função

1. Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente, os valores máximo e mínimo locais de f, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

e) $f(x) = \sin x + \cos x\,,\ 0 \le x \le 2\pi$

f) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

g) $f(x) = x^2 \ln x$

h) $f(x) = x^2 - x - \ln x$

i) $f(x) = x^4 e^{-x}$

j) $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x\,,\ 0 \le x \le 2\pi$

2. Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando os Testes da Primeira e da Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

a) $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

3. Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

a) Assíntota vertical $x = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < -2$, $f'(x) < 0$ se $x > -2$ $(x \neq 0)$. $f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$.

b) $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$, $f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$, $f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$.

c) $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$, $f'(-2) = 0$, $\lim_{x\to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $x \neq 2$.

d) $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$, $f'(-2) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$, $f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$.

4. Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente, os valores máximos ou mínimos locais, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Use estas informações para esboçar o gráfico.

a) $f(x) = x^3 - 12x + 2$

b) $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$

c) $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

d) $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

e) $h(x) = (x+1)^5 - 5x - 2$

f) $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

g) $F(x) = x\sqrt{6-x}$

h) $G(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}}$

i) $C(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$

j) $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

k) $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

l) $g(x) = x - \sin x$, $0 \leq x \leq 4\pi$

5. Encontre: as assíntotas verticais e horizontais; os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente; os valores máximos e mínimos locais; os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Use esta informação das partes para esboçar o gráfico de f.

   a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

   b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

   c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

   d) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$

   e) $f(x) = e^{-x^2}$

   f) $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

   g) $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

6. Esboçar a curva.

   a) $y = x^3 - 12x^2 + 36x$

   b) $y = 2 + 3x^2 - x^3$

   c) $y = x^4 - 4x$

   d) $y = x^4 - 8x^2 + 8$

   e) $y = (4 - x^2)^5$

   f) $y = \dfrac{x}{x-1}$

   g) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

   h) $y = \dfrac{x-x^2}{2-3x+x^2}$

   i) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

   j) $y = \sqrt{x^2+x-2}$

7. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

   onde m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

8. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2+4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

12 de junho

Lista de Exercícios N° 4

Máximos e mínimos

1. Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?
2. Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.
3. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.
4. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.
5. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?
6. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?
7. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.
8. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.
9. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
10. As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2 , encontre as dimensões do pôster com a menor área.