Formas equivalentes do Axioma da Escolha

Teorema (AE): Seja X um conjunto tal que $\omega \hookrightarrow X$. Então $X \times X \equiv X$.

Demonstração: Como $\omega \hookrightarrow X$ então $X \neq \emptyset$. Considere $z_0 \in X$.

A função $t : X \longrightarrow X \times X$, definida por $t(x) = (x, z_0)$, $\forall\, x \in X$ é injetora, e portanto, $X \hookrightarrow X \times X$.

Falta mostrar que $X \times X \hookrightarrow X$. Isso ainda não sabemos. Mas como $\omega \hookrightarrow X$, é possível encontrar um subconjunto enumerável $Z \subseteq X$, com $Z \equiv \omega$, e portanto, vale que $Z \times Z \hookrightarrow Z$ (pois $\omega \times \omega \hookrightarrow \omega$), Dessa forma, existem subconjuntos Z de X que satisfazem $Z \times Z \hookrightarrow Z$.

A idéia da demonstração é obter o maior subconjunto de X (em cardinalidade) que tenha esta propriedade e mostrar que este conjunto é equipotente a X. Para isto, vamos usar o lema de Zorn.

Seja $\mathcal{V} = \{f : \exists\, Y \subseteq X \text{ com } \omega \hookrightarrow Y \text{ e } Y \times Y \overset{f}{\hookrightarrow} Y\}$

$\mathcal{V} \neq \emptyset$, pois $\omega \hookrightarrow X$.

Dados $f, g \in \mathcal{V}$, definimos a seguinte relação em $\mathcal{V}$:

$$f \leq g \leftrightarrow \begin{cases} D_f \subseteq D_g \\ e \\ g_{|D_f} = f \end{cases}$$

$\leq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{V}$.

Seja agora $(f_i)_{i \in I}$ uma cadeia em $\mathcal{V}$, isto é, um conjunto totalmente ordenado em $\mathcal{V}$. Vamos provar que esta cadeia possui limitante superior em $\mathcal{V}$.

Para cada $i \in I$, considere $Y_i \subseteq X$ com $\omega \hookrightarrow Y_i$ e $f_i : Y_i \times Y_i \hookrightarrow Y_i$.

Seja $Z = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Então $Z \subseteq X$ e $\omega \hookrightarrow Z$.

Considere $\tilde{f} : Z \times Z \longrightarrow Z$ definida da seguinte maneira:

dado $(z, z') \in Z \times Z$, existem $i, j \in I$ tais que $z \in Y_i$ e $z' \in Y_j$. Como $(f_i)_{i \in I}$ é uma cadeia, ou $f_i \leq f_j$ ou $f_j \leq f_i$. Sem perda de generalidade, suponhamos $f_i \leq f_j$. Então $z, z' \in Y_j$ e f_j restrita ao conjunto $Y_i \times Y_i$ coincide com f_i. Definimos $\tilde{f}(z, z') = f_j(z, z')$.

$\tilde{f}$ é injetora (prove!), e portanto, $Z \times Z \overset{\tilde{f}}{\hookrightarrow} Z$. Logo, $\tilde{f}$ é um majorante da cadeia $(f_i)_{i \in I}$.

Pelo lema de Zorn, $\mathcal{V}$ possui elemento maximal: existe $g : Y \times Y \hookrightarrow Y$, com $\omega \hookrightarrow Y$ e $Y \subseteq X$ e, para todo $f \in \mathcal{V}$, $g \leq f \Rightarrow g = f$.

Vamos provar que $Y \equiv X$.

Como $Y \times Y \hookrightarrow Y$ e sempre vale que $Y \hookrightarrow Y \times Y$, temos que $Y \times Y \equiv Y$.

Se $Y \equiv X$, vem que $X \times X \equiv X$.

Se $Y = X$, já temos o resultado.

Se Y não é equipotente a X, vamos provar que existe $W \subseteq (X - Y)$ com $\omega \hookrightarrow X - Y$ e

$(Y \cup W) \times (Y \cup W) \hookrightarrow Y \cup W$, o que contraria a maximalidade de Y.

Por sua vez, para todo conjunto W, vale que

$(Y \cup W) \times (Y \cup W) = (Y \times Y) \cup (Y \times W) \cup (W \times Y) \cup (W \times W)$.

Como $Y \times Y \equiv Y$, vamos obter três conjuntos disjuntos dois a dois e contidos em $W \subseteq X - Y$ para chegar à equipotência $(Y \cup W) \times (Y \cup W) \equiv Y \cup W$, e contrariar a maximalidade de Y.

Afirmação: existem conjuntos Y_0, Y_1, $Y_2 \subseteq Y$, não vazios e dois a dois disjuntos e funções injetoras

$$\begin{cases} Y \times Y \overset{f_0}{\hookrightarrow} Y_0 \\ Y \times Y \overset{f_1}{\hookrightarrow} Y_1 \\ Y \times Y \overset{f_2}{\hookrightarrow} Y_2 \end{cases}$$

Como $\omega \hookrightarrow Y$, existem elementos distintos $y_0, y_1, y_2 \in Y$. Então $\{y_0\} \times Y$, $\{y_1\} \times Y$, $\{y_2\} \times Y$ são dois a dois disjuntos e são subconjuntos de $Y \times Y$.

Temos $g : Y \times Y \hookrightarrow Y$. Considere

$$\begin{cases} Y_0 = g(\{y_0\} \times Y) \\ Y_1 = g(\{y_1\} \times Y) \\ Y_2 = g(\{y_2\} \times Y) \end{cases}$$

Como g é injetora, vale que $Y \equiv Y_i$, $i = 0, 1, 2$. Como $Y \times Y \equiv Y$, resulta que

$Y \times Y \equiv Y \equiv Y_i$, $i = 0, 1, 2$. Além disso, $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, para $i, j \in \{0, 1, 2\}, i \neq j$.

Seja $f_i : Y \times Y \hookrightarrow Y_i$, $i = 0, 1, 2$.

Afirmação: $X - Y \hookrightarrow Y$ e $X - Y$ não é equipotente a Y.

Dados os conjuntos $X - Y$ e Y, temos que $(X - Y) \hookrightarrow Y$ ou $Y \hookrightarrow (X - Y)$. Vamos provar que o fato de $Y \hookrightarrow (X - Y)$ leva a uma contradição. Então virá que $(X - Y) \hookrightarrow Y$ e $(X - Y)$ não é equipotente a Y.

Suponhamos, pois, que existe uma função $u : Y \longrightarrow X - Y$ injetora. Vamos designar

$$\begin{cases} u(Y) = W \\ u(Y_0) = W_0 \\ u(Y_1) = W_1 \\ u(Y_2) = W_2 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} Y \equiv W \\ W \equiv Y \equiv Y_i \equiv W_i \quad i = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Como $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, para $i \neq j$, vale igualmente que $W_i \cap W_j = \emptyset$. Temos:

$Y \equiv W$ e $Y \times Y \equiv W \quad \Rightarrow \quad \exists\, \tilde{f}_0 : W \times W \longrightarrow W_0$

$Y \equiv W \Rightarrow W \times Y \equiv Y \times Y \hookrightarrow Y_1 \equiv W_1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \tilde{f}_1 : W \times Y \hookrightarrow W_1$

$Y \times W \equiv Y \times Y \hookrightarrow Y_2 \equiv W_2 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \tilde{f}_2 : Y \times W \hookrightarrow W_2$

Seja $h : (Y \cup W) \times (Y \times W) \longrightarrow Y \cup W$ definida da seguinte forma:

$$h_{|Y\times Y} = g : Y \times Y \longrightarrow Y$$

$$h_{|W\times Y} = \tilde{f}_1 : W \times Y \longrightarrow W_1 \subseteq X - Y$$

$$h_{|Y\times W} = \tilde{f}_2 : Y \times W \longrightarrow W_2 \subseteq X - Y$$

$$h_{|W\times W} = f_0 : W \times W \longrightarrow W_0 \subseteq X - Y$$

h é injetora, o que contraria a maximalidade de (g, Y).

Por sua vez,

$X - Y \hookrightarrow Y$ e $X - Y$ não é equipotente a Y e $Y \equiv Y_0$. Logo $X - Y \hookrightarrow Y_0$

$X = (X - Y) \cup Y \hookrightarrow (X - Y) \cup Y_1 \hookrightarrow Y_0 \cup Y_1 \hookrightarrow Y$

Dessa forma, $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow X \;\Rightarrow\; X \equiv Y$, e portanto, $X \times X \equiv Y \times Y \equiv Y \equiv X$. $\triangle$

Definição: Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que X é indutivo se toda cadeia em X possui um majorante, isto é: se $A \subseteq X$ é um subconjunto de X totalmente ordenado por $\leq$ então existe $m \in X$ tal que $x \;\leq\; m$, $\forall\, x \in A$.

Teorema (AE): Lema de Zorn: Todo conjunto parcialmente ordenado e indutivo possui elemento maximal.

Demonstração: Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, e considere $\mathcal{X}$ o conjunto das cadeias de X, isto é, $\mathcal{X} = \{C \subseteq X : C$ é totalmente ordenado pela ordem $\leq$ induzida de $X\}$.

Seja $(\mathcal{X}, \subseteq)$ ordenado pela inclusão de conjuntos. Vamos provar que $\mathcal{X}$ possui um elemento $\subseteq$ - maximal.

Para todo $C \in \mathcal{X}$, designamos

$$\hat{C} = \{x \in X : C \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}$$

Temos que

$$\begin{cases} C \subseteq \hat{C} \\ C \text{ é maximal} \;\leftrightarrow\; \hat{C} = C \end{cases}$$

Pelo Axioma da Escolha, existe uma função $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ tal que $f(A) \in A$, $\forall\, A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

Seja $g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ definida por

$$g(C) = \begin{cases} C & \text{se } \hat{C} = C \\ C \cup \{f(\hat{C} - C)\} & \text{se } \hat{C} \neq C \end{cases}$$

Observe que $f(\hat{C} - C) \in \hat{C} - C \subseteq \hat{C} \;\Rightarrow\; C \cup \{f(\hat{C} - C)\} \in \mathcal{X}$, e portanto, g está bem definida. (a função g pega uma cadeia de X e aumenta um pouco quando é possível).

Vamos tentar obter cadeias grandes em $\mathcal{X}$ por inclusão. Para isto, definimos o que chamaremos

de torre em $\mathcal{X}$.

Uma torre em $\mathcal{X}$ é um conjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{X}$ verificando as seguintes condições:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) $\forall C \in \mathcal{X}(C \in \mathcal{I} \rightarrow \ g(C) \in \mathcal{I})$

(iii) se $\mathcal{C}$ é uma $\subseteq$ - cadeia em $\mathcal{I}$ então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I}$.

Como $\mathcal{X}$ é o conjunto de todas as cadeias então $\mathcal{X}$ é uma torre.

Seja $\mathcal{I}_0$ a interseção de todas as torres em $\mathcal{X}$. É fácil ver que $\mathcal{I}_0$ é uma torre (exercício para você).

Vamos provar que $\mathcal{I}_0$ é uma cadeia em $\mathcal{X}$, isto é, dados quaisquer $C, D \in \mathcal{I}_0$, ou $C \subseteq D$ ou $D \subseteq C$.

Para isto, apresentamos uma nova definição: $C \in \mathcal{I}_0$ é dito comparável se, para todo $D \in \mathcal{I}_0$, tem-se que $C \subseteq D$ ou $D \subseteq C$.

Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos elementos de $\mathcal{I}_0$ que são comparáveis:

$$\mathcal{E} = \{C \in \mathcal{I}_0 : C \text{ é comparável } \} \subseteq \mathcal{I}_0.$$

Vamos provar que $\mathcal{E}$ é uma torre. Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I}_0$, virá que $\mathcal{E} = \mathcal{I}_0$, e portanto, $\mathcal{I}_0$ é uma $\subseteq$ - cadeia, um conjunto totalmente ordenado pela ordem de inclusão.

Temos:

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$, pois $\emptyset \subseteq D$, $\forall\ D \in \mathcal{I}_0$.

(iii) Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathcal{E}$ então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{E}$.

Com efeito: seja $D \in \mathcal{I}_0$. Como $\mathcal{C}$ é uma coleção de elementos de $\mathcal{E}$, todos os seus elementos são comparáveis. Temos então dois casos possíveis:

(a) se $C \subseteq D$, $\forall\ C \in \mathcal{C}$ então $\bigcup \mathcal{C} \subseteq D$.

(b) se existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq C$ então $D \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

Falta verificar a condição (ii) da definição de torre:

(ii) $C \in \mathcal{E} \ \rightarrow \ g(C) \in \mathcal{E}$ (isto é, $g(C)$ é comparável com todo $D \in \mathcal{I}_0$).

Seja $D \in \mathcal{I}_0$. Como $C \in \mathcal{E}$, vale que $D \subseteq C$ ou $C \subseteq D$.

Suponhamos $D \subseteq C$ e $D \neq C$.

Como $C \in \mathcal{E}$, vale que $C \subseteq g(D)$ ou $g(D) \subseteq C$.

Se $C \subseteq g(D)$ e $C \neq g(D)$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} D \subseteq C \subseteq g(D) \\ D \neq C \ \rightarrow \ \exists\ d_1 \in C - D \\ C \neq g(D) \ \rightarrow \ \exists\ d_2 \in g(D) - C \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ d_1, d_2 \in g(D) - D :$$

contradição, pois $g(D) - D$ possui, no máximo, um elemento.

Logo,

$$D \subseteq C \text{ e } D \neq C \text{ e } C \neq g(D) \;\; \rightarrow \;\; g(D) \subseteq C \qquad (*)$$

Por sua vez, vale que

$C \subseteq D$ e $D \subseteq g(D) \;\; \rightarrow \;\; C \subseteq g(D)$.

Considere $\mathcal{W} = \{D \in \mathcal{I}_0 : D \subseteq C \text{ ou } g(C) \subseteq D\}$.

Afirmação: $\mathcal{W}$ é uma torre.

(i) É claro que $\emptyset \in \mathcal{W}$.

(iii) Se $\mathcal{D}$ é uma cadeia em $\mathcal{W}$ então $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{W}$.

De fato:

se $D \subseteq C$, $\forall\, D \in \mathcal{D}$ então $\bigcup \mathcal{D} \subseteq C$.

Se existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $C \subseteq D$ então $C \subseteq \bigcup \mathcal{D}$.

(ii) Se $D \in \mathcal{W}$ então $g(D) \in \mathcal{W}$.

Com efeito: Se $D \in \mathcal{W}$ então $D \subseteq C$ ou $g(C) \subseteq D$. Temos três possibilidades:

$$\begin{cases} D \subseteq C \text{ e } D \neq C \quad \text{ou} \\ D = C \quad \text{ou} \\ g(C) \subseteq D \end{cases}$$

Vamos considerar estes três casos:

(a) $D = C$.
Então $g(C) = g(D) \;\rightarrow\; g(C) \subseteq g(D) \;\rightarrow\; g(D) \in \mathcal{W}$.

(b) $D \subseteq C$ e $D \neq C$ e $C \neq g(D)$. Então, por (*), $g(D) \subseteq C \;\Rightarrow\; g(D) \in \mathcal{W}$.

(c) $g(C) \subseteq D$. Como $D \subseteq g(D)$, resulta que $g(C) \subseteq g(D)$, e portanto $g(D) \in \mathcal{W}$.

Logo, $\mathcal{W}$ é uma torre. Como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{I}_0$, concluimos que $\mathcal{W} = \mathcal{I}_0$.

Logo, para todo $D \in \mathcal{I}_0 = \mathcal{W}$, vale que $D \subseteq C$ ou $g(C) \subseteq D$. Como $C \subseteq g(C)$, obtemos

$$D \subseteq g(C) \quad \text{ou} \quad g(C) \subseteq D.$$

Dessa forma, $C \in \mathcal{E} \;\rightarrow\; g(C) \in \mathcal{E}$,

e portanto, $\mathcal{E}$ é uma torre, e $\mathcal{E} = \mathcal{I}_0$. Concluimos que $\mathcal{I}_0$ é uma cadeia em $\mathcal{X}$. Pela condição (iii) da definição de torre,

$$\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_0 \;\rightarrow\; \bigcup \mathcal{I}_0 \in \mathcal{I}_0.$$

Vamos designar $C_0 = \bigcup \mathcal{I}_0$.

Como $C_0 \in \mathcal{I}_0$ e $\mathcal{I}_0$ é torre, vale que $g(C_0) \in \mathcal{I}_0$.

Mas $g(C_0) \in \mathcal{I}_0 \rightarrow g(C_0) \subseteq \bigcup \mathcal{I}_0 = C_0$. Assim,

$$\left.\begin{array}{l} C_0 \subseteq g(C_0) \\ g(C_0) \subseteq C_0 \end{array}\right\} \rightarrow g(C_0) = C_0$$

e portanto, C_0 é maximal em $\mathcal{X}$. Por sua vez, C_0 é uma $\leq$ - cadeia em X. Como X é indutivo, existe $m \in X$ tal que $x \leq m$, $\forall\, x \in C_0$. Logo, $C_0 \cup \{m\}$ é uma cadeia.

$C_0 \cup \{m\}$ é uma cadeia $\Rightarrow$ $C_0 \cup \{m\} \in \mathcal{X}$. Mas $C_0 \cup \{m\} \subseteq C_0$ e C_0 é cadeia maximal. Logo, $C_0 \cup \{m\} = C_0$, e portanto, $m \in C_0$.

Vamos mostrar que m é um elemento maximal de X.

Seja $t \in X$ com $m \leq t$. Como C_0 é maximal em $\mathcal{X}$, vale que $C_0 \cup \{t\} = C_0$, e portanto, $t \in C_0$, e $t \leq m$. Mas $m \leq t$, de maneira que resulta $t = m$, e m é maximal em X. $\triangle$

Teorema: O Lema de Zorn implica no Teorema de Zermelo:Todo conjunto pode ser bem ordenado.

Demonstração: Seja X um conjunto não vazio, e considere
$\mathcal{F} = \{(A, \leq_A) : A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$ e $(A, \leq_A)$ é bem ordenado $\}$.

Dados $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B) \in \mathcal{F}$, definimos a seguinte relação $\leq$:

$(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ se as condições abaixo estiverem verificadas:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $\forall\, x, y \in A (x \leq_A y \leftrightarrow x \leq_B y)$ (a ordem $\leq_A$ em A é induzida pela ordem $\leq_B$ de B).

(iii) $\forall\, x, y (x \in A$ e $y \in B - A \Rightarrow x \leq_B y)$.

Afirmação : $\leq$ é uma ordem em $\mathcal{F}$. (Exercício)

Seja $\mathcal{C} = \{(A_i, \leq_i) : i \in I\}$ uma cadeia em $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é limitada superiormente. Daí virá que $\mathcal{F}$ é um conjunto indutivo com a ordem $\leq$ considerada.

Seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathcal{C}$. Vamos definir uma ordem em A.

Dados $x, y \in A$, existem $i, j \in I$ tais que $x \in A_i$ e $y \in A_j$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, é um conjunto totalmente ordenado. Sem perda de generalidade, suponhamos $(A_i, \leq_i) \leq (A_j, \leq_j)$. Então $x, y \in A_j$. Definimos $x \leq_A y$ se $x \leq_j y$.

$(A, \leq_A)$ está bem definida e é uma ordem parcial em A. Vamos mostrar que $\leq_A$ é uma boa ordem em A. Para isso, precisamos da seguinte propriedade:

$minA_i = minA_j$, $\forall\, i, j \in I$.

Com efeito: suponhamos $(A_i, \leq_i) \leq (A_j, \leq_j)$ (pois $\mathcal{F}$ é uma cadeia) e $m_i = minA_i$ e $m_j = minA_j$.

Como $A_i \subseteq A_j$, vale que $m_j \leq m_i$.

Por sua vez, temos duas possibilidades:

$$m_j \in A_i \quad \text{ou} \quad m_j \in A_j - A_i$$

Caso 1: $\left.\begin{array}{l} m_j \in A_i \\ m_i = minA_i \end{array}\right\} \Rightarrow m_i \leq m_j$

Caso 2: $\left.\begin{array}{l} m_j \in A_j - A_i \\ A_i \subseteq A_j \end{array}\right\} \Rightarrow m_i \leq_B m_j \Rightarrow m_i \leq m_j.$

Dessa forma, $m_i \leq m_j$ e $m_j \leq m_i \Rightarrow m_i = m_j$.

Seja $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Vamos provar que B possui elemento mínimo.

Seja $J = \{i \in I : B \cap A_i \neq \emptyset\}$. Como $(A_i, \leq_i)$ é bem ordenado, existe $b_i = min(B \cap A_i)$, $\forall\, i \in J$.

Afirmação: $b_i = b_j$, $\forall\, i, j \in J$. A demonstração é análoga à que acabamos de fazer, mas vamos a ela.

Sejam $i, j \in J$. Sem perda de generalidade, suponhamos $A_i \subseteq A_j$. Temos:

$$A_i \subseteq A_j \Rightarrow B \cap A_i \subseteq B \cap A_j \Rightarrow b_j \leq b_i.$$

Por sua vez, $b_j \in B \cap A_i$ ou $b_j \in B \cap A_j - B \cap A_i$

Caso 1: $\left.\begin{array}{l} b_j \in B \cap A_i \\ b_i = minB \cap A_i \end{array}\right\} \Rightarrow b_i \leq b_j$

Caso 2: $\left.\begin{array}{l} b_j \in B \cap A_j - B \cap A_i \Rightarrow b_j \in (A_j - A_i) \\ b_i \in A_i \subseteq A_j \end{array}\right\} \Rightarrow b_i \leq b_j.$

Concluimos que $b_i = b_j$.

Dessa forma, existe $b_0 = min(B \cap A_i)$, $\forall\, i \in J$. Como $B = \bigcup_{i \in I}(B \cap A_i)$, concluimos que $b_0 = minB$, e $(A, \leq)$ é bem ordenado.

Afirmação: $(A, \leq)$ é um majorante de $\mathcal{C}$: $(A_j, \leq_j) \leq (A, \leq)$, $\forall\, j \in J$. (Exercício)

Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal $(Z, \leq_Z)$. Em particular, $(Z, \leq_Z) \in \mathcal{F}$, e portanto, é um conjunto bem ordenado, e não existe $(Z_1, \leq_{Z_1}) \in \mathcal{F}$ com $(Z, \leq_Z) \leq (Z_1, \leq_{Z_1})$ e $(Z, \leq_Z) \neq (Z_1, \leq_{Z_1})$.

Suponhamos $Z \neq X$. Então existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin Z$. Considere $Z_1 = Z \bigcup \{x_0\}$ e $\leq_{Z_1}$ a relação definida por

$\leq_{Z_1} = \leq_Z \bigcup \{(x, x_0) : x \in Z\} \bigcup \{(x_0, x_0)\}$. Então $(Z_1, \leq_{Z_1})$ é bem ordenado, com $(Z, \leq_Z) \leq (Z_1, \leq_{Z_1})$ e $Z \neq Z_1$, o que contradiz a maximalidade de $(Z, \leq_Z)$. Logo, $Z = X$, e X pode ser bem ordenado. $\triangle$

Teorema: O Teorem de Zermelo implica no Axioma da Escolha.

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos. Pelo Axioma da União, existe o conjunto $Z = \bigcup \mathcal{C}$. Pelo teorema de Zermelo, existe uma boa ordem $\leq$ em Z.

Considere $C = \{x \in Z : \exists\, A \in \mathcal{C} \text{ e } x = minA\}$.

Então $C \subseteq Z = \bigcup \mathcal{C}$.

Seja $A \in \mathcal{C}$ e $x = minA$. Então $C \cap A = \{x\}$.

Com efeito:

Para todo $A \in \mathcal{C}$, existe $x = minA$. Então, $\forall\ A \in \mathcal{C}$, $\{x\} \subseteq C\ \cap\ A$.

Por outro lado,

$t \in C \cap A \Rightarrow\ t \in A$.

$t \in C \Rightarrow\ \exists\ A' \in \mathcal{C} : t = minA'$.

Se $A \neq A'$ então $A \cap A' = \emptyset$.

Temos:

$$\begin{cases} t = minA' \Rightarrow\ t \in A' \\ t \in C \cap A \Rightarrow\ t \in A' \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$$: contradição. Logo, $t \in C \cap A \Rightarrow\ t = x$, e $C \cap A = \{x\}$. $\triangle$