Modelos estocásticos e determinísticos

Modelos estocásticos

Modelos estocásticos

- São modelos matemáticos que incorporam processos probabilísticos.
- Esses modelos não produzem uma única solução, mas um conjunto de soluções.
- Esse conjunto dá uma distribuição de valores e o resultado é interpretado na forma de probabilidades.

Modelos estocásticos

- Exemplo: um modelo climático para previsão utiliza um conjunto de dados iniciais. Ao invés de realizarmos apenas uma simulação, escolhemos alguma variável e aplicamos algum método para alterar o valor dessa variável e realizamos uma simulação para cada novo valor, gerando assim um conjunto de soluções diferentes.
- Quando vamos analisar os resultados, por exemplo a temperatura média num certo período, olhamos para uma distribuição de resultados e para a probabilidade de termos a temperatura dentro de um intervalo.

Modelos estocásticos

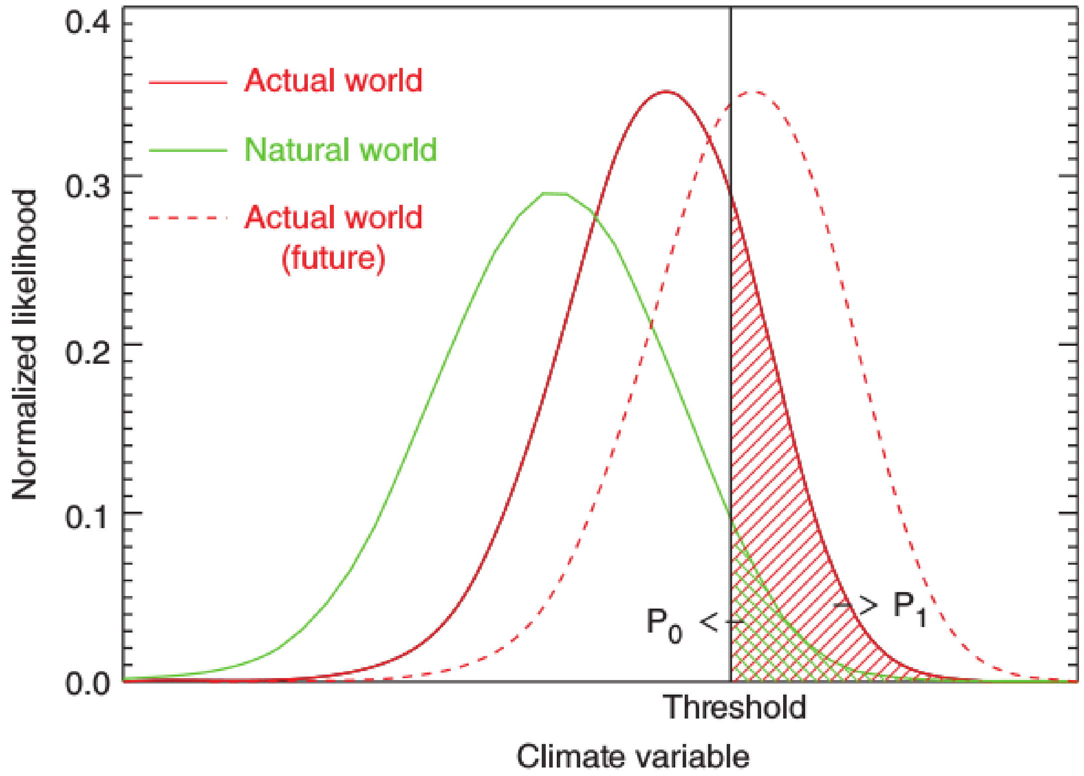


FIGURE 1 | An illustration of the Probability Density Functions (PDFs) of a climatic variable with (solid red line) and without (green line) the effect of human influence on the climate. The corresponding probabilities of exceeding a prespecified threshold (P_1 and P_0) are represented by the hatched areas of the same color. The red-dashed line illustrates how the PDF of the actual world may change in a changing climate.

Fonte: Stott, P. A., Christidis, N., Otto, F. E., Sun, Y., Vanderlinden, J. P., Van Oldenborgh, G. J., ... & Zwiers, F. W. (2016). Attribution of extreme weather and climate-related events. Wiley Interdisciplinary Reviews: Climate Change, 7(1), 23-41.

Modelagem Ambiental e Aplicações

Modelos Determinísticos

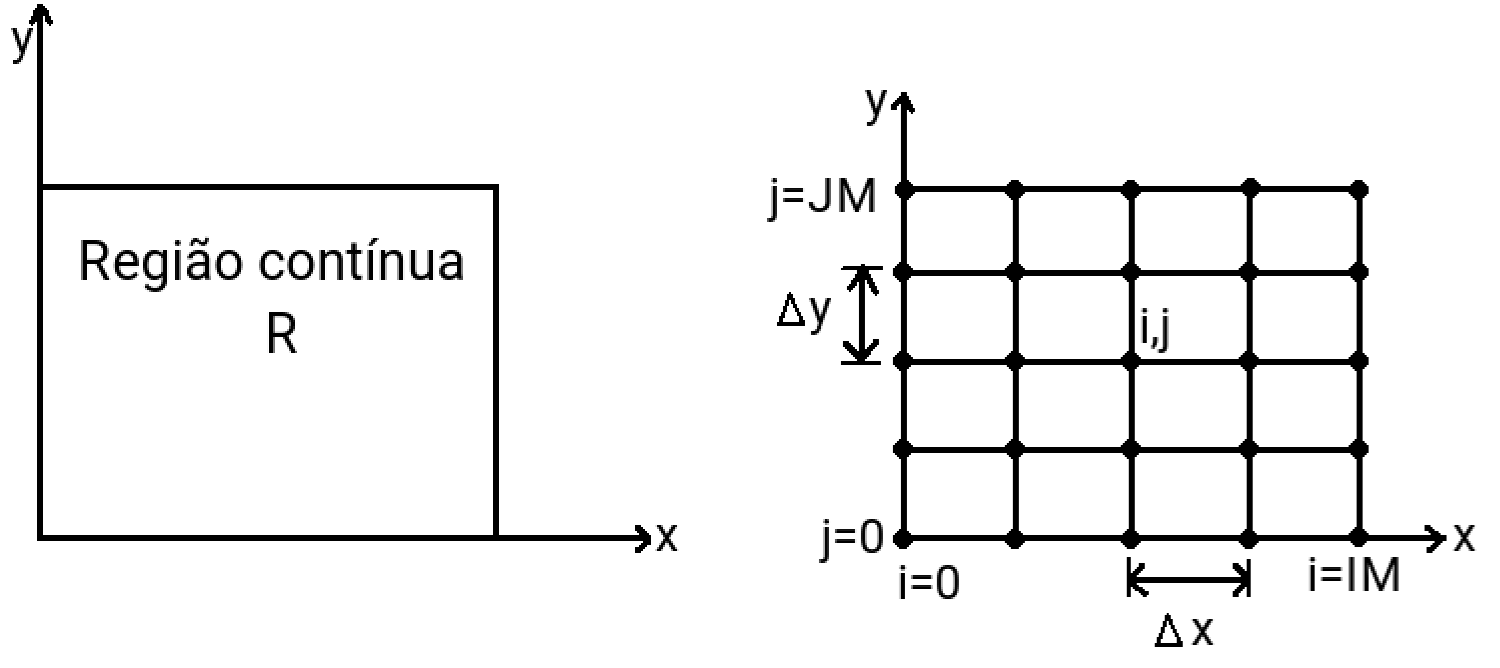
Diferenças Finitas

Diferenças Finitas

- A solução de uma equação diferencial em uma região R é a obtenção dos valores para a variável dependente em cada ponto de R
- O computador só pode calcular o valor da variável dependente em qualquer ponto se utilizar uma solução análitica para a equação diferencial.
- Quando usamos técnicas numéricas para solucionar a equação diferencial, não podemos tratar a região R como contínua.
- Então escolhemos alguns pontos dentro da região R e calculamos a a solução apenas para estes pontos. Esse processo é chamado de **DISCRETIZAÇÃO.**

Diferenças Finitas

- O conjunto de pontos discretos é chamado de GRADE ou MALHA.



- O “tamanho” de Δx e Δy definem a RESOLUÇÃO ESPACIAL da grade. Quando temos Δt, essa é a RESOLUÇÃO TEMPORAL (passo no tempo) da grade.

Diferenças Finitas

- Para solucionar as equações diferenciais numericamente, precisamos discretizá-las, gerando uma Equação de Diferenças Finitas.
- Essa equação é uma aproximação da equação diferencial e não é exata, pois traz erros devidos a:
  - O processo de discretização (erro local de truncamento - ELT);
  - Arredondamento nos cálculos feitos no computador;
  - Aproximação numérica de condições auxiliares (condições de fronteira e iniciais).

Diferenças Finitas

- Caminho contrário da definição de derivada com o limite:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Podemos usar diferentes técnicas de discretização. Nessa aula, usaremos a expansão em séries de Taylor.

Diferenças Finitas

- Expansão em Série de Taylor:

$$f(x)=f(x_0)+(\Delta x)\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)+\ldots+R_N$$

onde $\Delta x = x - x_0$ e R_N é o resto, definido como:

$$R_N=\frac{(\Delta x)^N}{N!}\frac{d^N f}{dx^N}(a),\ a\in[a\ ,\ b]$$

Podemos escrever como:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(\Delta x)}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)+\ldots+\frac{R_N}{\Delta x}$$

Ou seja:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}+ELT\ ,\ ELT=Erro\ Local\ de\ Truncamento$$

Erro Local de Truncamento

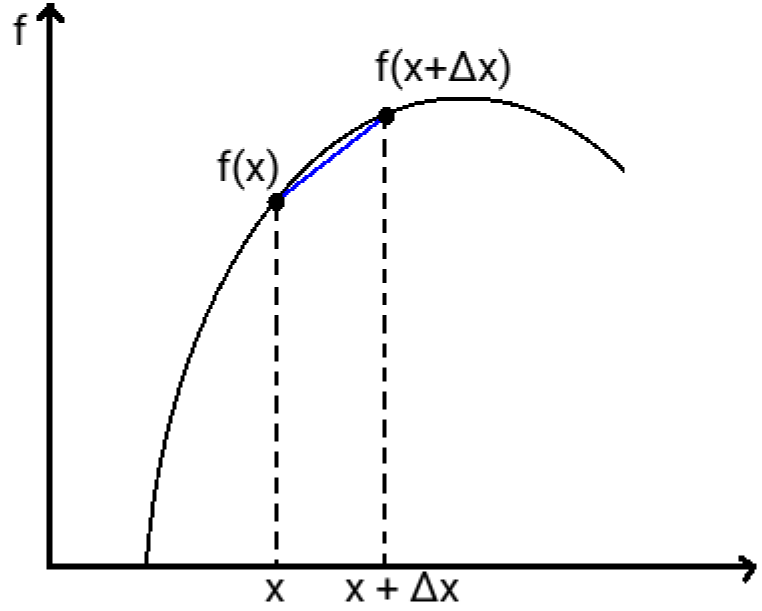
- Percebemos que todos os termos do ELT têm o fator Δx. De fato, o valor do ELT depende do valor de Δx.
- Podemos diminuir o ELT se diminuirmos o Δx.
- Considerando 0 < Δx < 1, o termo dominante no ELT será o termo com a menor potência de Δx. Esse termo dá a <u>ORDEM</u> da aproximação.
- No exemplo, a ordem da aproximação é a primeira.

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}-\underbrace{\left[\frac{(\boldsymbol{\Delta x})}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0)+\ldots+\frac{R_N}{\Delta x}\right]}_{ELT}$$

Diferenças Finitas

- Pode-se usar pontos diferentes nas aproximações.
- No exemplo, usamos <u>diferenças progressivas</u>, porque usamos o próximo ponto (x+Δx) para calcular a diferença.

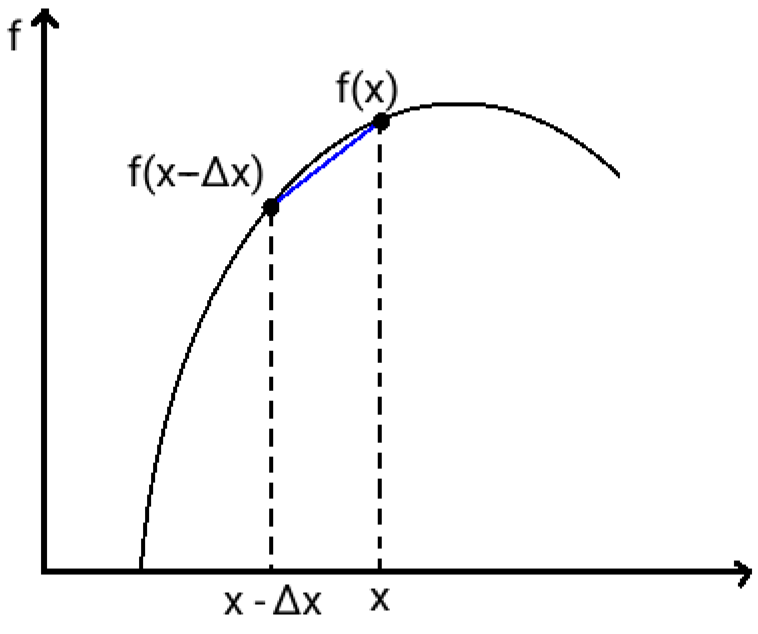
$$\frac{df}{dx}(i)=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}+O(\Delta x)$$



Diferenças Finitas

- Pode-se usar <u>diferenças atrasadas</u> com o ponto anterior (x-Δx) para calcular a diferença.

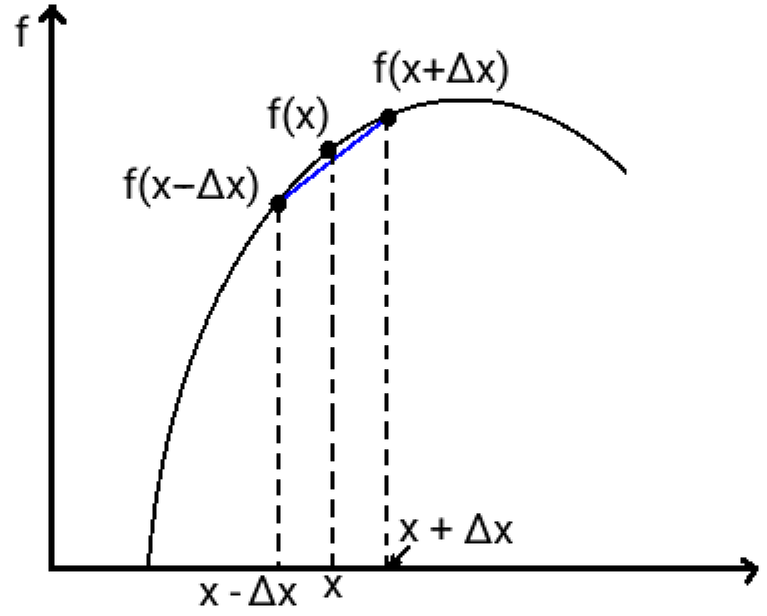
$$\frac{df}{dx}(i)=\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}+O(\Delta x)$$



Diferenças Finitas

- Pode-se usar diferenças centrais com os pontos anterior (x-Δx) e posterior (x+Δx) para calcular a diferença. Nesse caso a ordem da diferença é a segunda.

$$\frac{df}{dx}(i)=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\,\Delta x}+O(\Delta x)^2$$



Diferenças Finitas

- Referência: livro “Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos – Conceitos básicos e aplicações”, Armando de Oliveira Fortuna, 2000.