Técnicas de Integração - Continuação e Integrais Imprópias
Aula 35

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Exemplo

A função racional $\dfrac{5x^6 + 43x + 7}{(x-1)(x+1)^3(x^2+1)(x^2+3)^2}$ *pode se escrita como*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{x^2+3} + \frac{Ix+J}{(x^2+3)^2}$$

onde $A, C, \ldots, J$ *são constantes.*

Para integrar funções racionais basta saber

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n}dx$ com $n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ é simples (Fazer $u = x + a$).
2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$ com $n \geq 1$ é simples (Fazer $u = x^2 + 1$).
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + k$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ para $n \geq 2$

Obs.1 $\quad b^2 - 4c < 0 \Rightarrow x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + A^2$, $A = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$

Obs.2 $$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + A^2 = A^2\left[\left(\underbrace{\frac{x}{A} + \frac{b}{2A}}_{z}\right)^2 + 1\right] = A^2(z^2+1)$$

Para $n \geq 2$

Fazendo $x = \tan(t)$. Então $dx = \sec^2(t)dt$, $x^2 + 1 = \sec^2(t)$ e

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \cos^{2n-2}(t)dt$$

e esta última integral já sabemos calcular.

A Substituição $u = tg(x/2)$

A substituição $u = \mathrm{tg}(x/2)$ transforma qualquer quociente envolvendo seno e cosseno em uma função racional de polinômios. Observemos que

$$\mathrm{sen}(x) = 2\mathrm{sen}(x/2)\cos(x/2) = 2\frac{\mathrm{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2).$$

Assim,

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Também temos que

$$\cos(x) = 1 - 2\mathrm{sen}^2(x/2) = \cos^2(x/2)\sec^2(x/2) - 2\cos^2(x/2)\mathrm{tg}^2(x/2),$$

logo,

$$\cos(x) = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Exemplo

Calcule $\int \frac{1}{\cos(x) + \mathrm{sen}(x)}\, dx.$

Fazendo $u = \mathrm{tg}(x/2)$, temos que $du = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{tg}^2(x/2))dx$, então $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. Utilizando as identidades trigonométricas anteriores,

$$\cos(x) + \mathrm{sen}(x) = \frac{1 - u^2 + 2u}{1 + u^2}.$$

Assim,

$$\int \frac{1}{\cos(x) + \mathrm{sen}(x)}\, dx = 2 \int \frac{1}{1 - u^2 + 2u}\, du,$$

a qual pode ser integrada utilizando frações parciais. Note que

$$\frac{1}{u^2 - 2u - 1} = \frac{1}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b} \right),$$

onde $a = 1 + \sqrt{2}$ e $b = 1 - \sqrt{2}$. Portanto,

$$\int \frac{1}{\cos(x) + \mathrm{sen}(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln|u-b| - \ln|u-a| \right) + k$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\left|\mathrm{tg}(x/2) - 1 + \sqrt{2}\right| - \ln\left|\mathrm{tg}(x/2) - 1 - \sqrt{2}\right| \right) + k.$$

Integrais Imprópias

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ exige-se que a função f esteja definida num intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e que f seja limitada nesse intervalo. A seguir estendemos o conceito de integral definida para casos mais gerais.

Integrais Impróprias - Invervalos infinitos

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e calculemos a área A limitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, com $b > 1$. Então

$$A = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Fazendo $b \to +\infty$, temos $A \to 1$. Isto quer dizer que a área A do conjunto *ilimitado*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x),\ x \ge 1\}$$

é *finita* e igual a 1.

Definição (Integral Imprópria do Tipo 1)

- *Se* $\int_a^t f(x)\,dx$ *existe para cada número* $t \geq a$, *então definimos*

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx,}$$

se o limite existir.

- *Se* $\int_t^b f(x)\,dx$ *existe para cada número* $t \leq b$, *então definimos*

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx}$$

se o limite existir.

Quando uma das integrais impróprias acima existir e for finita, diremos que ela é **convergente**. Caso contrário, ela será dita **divergente**.

Exemplo

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x| \Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Como o limite é infinito, a integral é divergente.

Exemplo

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-2x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-2t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como o limite é finito, a integral é convergente.

Exemplo

Determine se a integral $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -1.$$

Como o limite é finito, a integral é convergente (primitiva $xe^x - e^x$).

Definição

Se as integrais $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ *existem e são convergentes, então definimos*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.}$$

Observação: Se uma das integrais impróprias $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ou $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ também o será.

Exemplo

Avalie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. *É conveniente escolher* $a = 0$ *na definição:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Calculemos as integrais.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{t} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{t}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Testes de Convergência

Algumas vezes não é possível encontrar um valor exato para uma integral imprópria, mas podemos saber se ela é convergente ou divergente usando outras integrais conhecidas.

Teorema (Teste da Comparação)

Sejam f e g funções contínuas satisfazendo $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$. Então,

(i) *Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ também é convergente.*

(ii) *Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ também é divergente.*

Exemplo

Mostre que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ *é convergente.*

Não podemos avaliar diretamente a integral pois a primitiva de e^{-x^2} não é uma função elementar. Observe que se $x \geq 1$, então $x^2 \geq x$, assim $-x^2 \leq -x$ e como a exponencial é crescente $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Assim,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Logo pelo Teste da Comparação a integral é convergente.

Exemplo

Analise a convergência de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx.$

Observe que $0 \le \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, para todo $x \in [1, \infty)$. Como a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, pelo Teste da Comparação a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$ é convergente.

Exemplo

Analise a convergência da $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$.

Observe que $\displaystyle\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x}$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge, então pelo Teste da Comparação a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente.

Teorema (Teste da Comparação no Limite)

Sejam $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ funções contínuas. Se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ serão ambas convergentes ou ambas divergentes.

Exemplo

Analise a convergência de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

As funções $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ são positivas e contínuas em $[1, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$$

Portanto, como a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ também é convergente.

Entretanto, as integrais convergem para valores diferentes.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\;dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} 1-\frac{1}{t} = 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}(\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo

Analise a convergência de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 2}\,dx$*.*

As funções $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ e $g(x) = \dfrac{3}{e^x - 2}$ são positivas e contínuas em $[1, \infty)$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x - 2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 2}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{2}{3e^x} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, como a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 2}\,dx$ também converge.

Integrais impróprias - funções ilimitadas

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Queremos calcular a área A limitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, e $x = 4$. Então

$$A = \int_{\varepsilon}^{4} f(x)\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{4} = 4 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $A \to 4$ o que quer dizer que a área A do conjunto *ilimitado*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\, 0 < x \leq 4\}$$

é *finita* e igual a 4.

Definição (Integral Imprópria do Tipo 2)

- *Seja f uma função contínua em $[a, b)$ (possivelemente ilimitada), definimos*
$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx,$$
se esse limite existir.
- *Seja f uma função contínua em $(a, b]$ (possivelemente ilimitada) definimos*
$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx,$$
se esse limite existir.
A integral imprópria $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ é chamada **convergente** *se o limite existir e for finito, caso contrário será dita* **divergente**.

- Se f não estiver definida em c, onde $a < c < b$, e ambos $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx$ e $\displaystyle\int_c^b f(x)\ dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Exemplo

Calcule $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

Observemos que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ não está definida em $x = 2$.

Então,

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} 2(x-2)^{1/2}\Big|_t^5$$
$$= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Exemplo

Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ *converge ou diverge.*

Como o $\lim_{t \to \pi/2^-} \sec x = +\infty$ a integral é imprópria. Então

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to \pi/2^-} \int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to \pi/2^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \Big|_0^t = \infty,$$

pois $\lim_{t \to \pi/2^-} \sec x = \lim_{t \to \pi/2^-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Portanto a integral é divergente.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$

Observemos que $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ não é contínua em $x = 1$. Então,

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) = -\infty,\end{aligned}$$

pois $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} (1-t) = 0$. Portanto a integral é divergente.

Observação: Se não tivéssemos notado a assíntota $x = 1$ no exemplo anterior e tivéssemos confundido a integral com uma integral definida, poderíamos ter calculado erroneamente. De agora em diante devemos prestar atenção no integrando para decidir se a integral é imprópria ou não.

Se $c \in (a, b)$ e $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$. Nestas condições, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ deverá ser tratada como uma integral imprópria. Daí, se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então $\int_a^b f(x)\,dx$ também será convergente e teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se pelo menos uma das integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ será divergente.