Teorema do Valor Médio para Integrais e Técnicas de Integração - Continuação
Aula 33 e 34

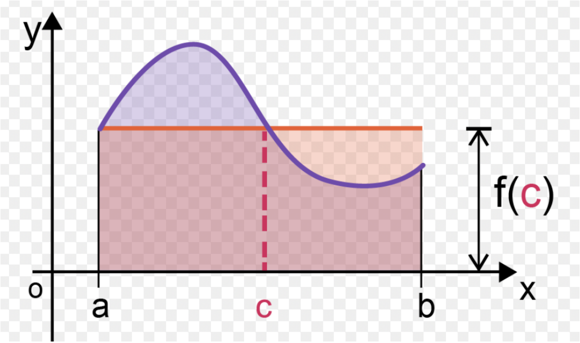
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Teorema do Valor Médio para Integrais

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.



Teorema do Valor Médio para Integrais

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Prova. Seja $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $x \in [a, b]$. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F' = f$ em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio para derivadas, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a).$$

Substituição inversa

Recorde que, $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.}$$

Esta formulação permite modificar o integrando de maneira a encontrar primitivas mais facilmente.

Quando g é uma função trigonométrica esta regra é chamada substituição trigonométrica.

Substituição Trigonométrica:

(a) $\sqrt{a^2 - x^2}$: $\mathbf{x} = \mathbf{a\ sen}(\theta)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $dx = a\ cos(\theta)d\theta$

(b) $\sqrt{a^2 + x^2}$: $\mathbf{x} = \mathbf{a\ tan}(\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $dx = a\ sec^2(\theta)d\theta$

(c) $\sqrt{x^2 - a^2}$: $\mathbf{x} = \mathbf{a\ sec}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$,
$dx = a\ sec(\theta)tan(\theta)d\theta$

Depois use $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$ ou $1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta)$.

Objetivo: eliminar a raiz.

Ex: $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \cdots = 4\int cos^2(x)\, dx$ pela substituição (a)

Esta integral aparece, por exemplo, no cálculo de área do círculo $y^2 + x^2 = 4$. (Poderia ser para área de elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

Exemplo

Calcule $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Como $1-\operatorname{sen}^2(t) = \cos^2(t)$, a mudança $x = \operatorname{sen}(t)\,, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = \cos(t)dt$. Então,

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\cos(t)\, dt = \int \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\, dt$$
$$= \int |\cos(t)|\cos(t)\, dt = \int \cos^2(t)\, dt,$$

pois $\cos t \geq 0$ se $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2(t)\,dt = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t)+k = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t)\,\cos(t)+k.
\end{aligned}
$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = \mathrm{sen}(t)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, segue que $t = \mathrm{arcsen}(x)$ e que $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$; logo

$$
\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+k, \quad -1 \leq x \leq 1.
$$

Exemplo

Calcule $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$.

Fazendo $u = x+1$, temos $x = u-1$ e $du = dx$. Então,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x+1}\,dx &= \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du \\
&= \int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)\,du \\
&= \frac{2}{7}u^{7/2} - 2\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + k \\
&= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$.

Como $1+\mathrm{tg}^2(t) = \sec^2(t)$, a mudança $x = \mathrm{tg}(t)\,, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = \sec^2(t)\, dt$. Então,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \sqrt{1+\mathrm{tg}^2(t)}\,\sec^2(t)\, dt \\ &= \int |\sec(t)|\sec^2(t)\, dt = \int \sec^3(t)\, dt,\end{aligned}$$

pois $\sec(t) \geq 0$ se $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. Agora,

$$\int \sec^3(t)\,dt = \int \underbrace{\sec(t)}_{f}\underbrace{\sec^2(t)}_{g'}\,dt = \underbrace{\sec(t)}_{f}\underbrace{\mathrm{tg}(t)}_{g} - \int \underbrace{\sec(t)\,\mathrm{tg}(t)}_{f'}\underbrace{\mathrm{tg}(t)}_{g}\,dt$$
$$= \sec(t)\,\mathrm{tg}(t) - \int \sec(t)(\sec^2(t)-1)\,dt.$$

Portanto,

$$2\int \sec^3(t)\,dt = \sec(t)\,\mathrm{tg}(t) + \int \sec(t)\,dt$$
$$= \sec(t)\,\mathrm{tg}(t) + \ln|\sec(t)+\mathrm{tg}(t)| + k.$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = \mathrm{tg}(t)$, segue $1+x^2 = \sec^2(t)$ e como $\sec(t) > 0$, $\sec(t) = \sqrt{1+x^2}$; logo

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\sec(t)\operatorname{tg}(t) + \ln|\sec(t)+\operatorname{tg}(t)| + k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|\right) + k.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ *com* $a>0$.

Se $x = a\tan(t)$, então $x^2+a^2 = a^2(\tan^2(t)+1) = a^2\sec^2(t)$ e $dx = a\sec^2(t)dt$. Assim:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int a\frac{\sec^2(t)}{a^2\sec^2(t)}\,dt = \frac{t}{a}+c = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+k$$

Primitivas de Funções Racionais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional expressando-a como soma de *frações parciais*. Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como soma de frações mais simples se o grau de P for menor que o grau de Q. Se o grau de P for maior ou igual ao grau de Q, então primeiro dividimos os polinômios,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde S, R, Q são polinômios e R tem grau menor que o grau de Q.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx.$

Dividindo obtemos

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+k.$$

Uma segunda etapa consiste em fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. Pode ser mostrado que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como produto de fatores lineares e de fatores quadráticos irredutíveis.

Exemplo

$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4).$

Finalmente, devemos expressar a função racional como uma soma de **frações parciais**. Explicamos os detalhes dos diferentes casos que ocorrem.

Denominadores Redutíveis do 2^o Grau

Teorema

Sejam α, β, m, $n \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq \beta$. Então existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

(i) $$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \ ;$$

(ii) $$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} \ .$$

Observação: Note que, para aplicarmos o teorema, o grau do numerador deve ser estritamente menor do que o grau do denominador do lado esquerdo das igualdades em (i) e (ii) do Teorema.

Procedimento para calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx$**, onde grau** $P < 2$**.**

- Se $\alpha \neq \beta$, então o Teorema 3 (i) implica que existem A, $B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}\,.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx &= \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx \\ &= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + k\,.\end{aligned}$$

- Se $\alpha = \beta$, então o Teorema 3 (ii) implica que existem A, $B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^2}\,dx &= A\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx + B\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx \\ &= A\ln|x-\alpha| - \frac{B}{(x-\alpha)} + k\,. \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx.$

Observe que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. O método de frações parciais dá

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

e portanto $A(x-2)+B(x-1)=x+3$ ou $(A+B)x-2A-B=x+3$. Como os polinômios são idênticos, seus coeficientes devem ser iguais. Logo, $A+B=1$ e $-2A-B=3$. Resolvendo, obtemos $A=-4$ e $B=5$ e assim

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx &= \int\left(\frac{-4}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx\\ &= -4\ln|x-1|+5\ln|x-2|+k.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\,dx.$

Neste caso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Seja $u = x - 1$ ou $x = u + 1$ e $du = dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{(u+1)^3+2}{u^2}\,du = \int \frac{u^3+3u^2+3u+3}{u^2}\,du \\ &= \frac{u^2}{2} + 3u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} + k \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + k.\end{aligned}$$

Denominadores Redutíveis do 3^o Grau

Teorema

Sejam α, β, γ distintos entre si, m, n, $p \in \mathbb{R}$. Então existem $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que

(i) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} \; ;$$

(ii) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2} \; ;$$

(iii) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)^3} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3} \; .$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

Como 1 é raiz de x^3-x^2-x+1, sabemos que $(x-1)$ é um fator e obtemos $x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$. A decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Então, $2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$. Fazendo $x = 1$ obtemos $3 = 2C$ ou $C = \dfrac{3}{2}$. Fazendo $x = -1$, obtemos $-1 = 4A$ ou $A = -\dfrac{1}{4}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = -\dfrac{1}{4} - B + \dfrac{3}{2}$ ou $B = \dfrac{1}{4}$. Assim,

$$\int \frac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + k.$$

Denominadores Irredutíveis do 2^o Grau

Queremos calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c}\, dx\,,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então devemos reescrever o denominador como soma de quadrados. Em seguida, fazemos uma mudança de variável e calculamos a integral.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx.$

Escrevamos o denominador como soma de quadrados $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$. Fazendo $u = x+1$, temos $du = dx$;

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx &= \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\, dx = \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1}\, du \\ &= \int \frac{2u}{u^2+1}\, du + \int \frac{-1}{u^2+1}\, du \\ &= \ln(1+u^2) - \operatorname{arctg}(u) + k \\ &= \ln(1+(x+1)^2) - \operatorname{arctg}(x+1) + k.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx.$

Como o grau do denominador é igual ao grau do denominador, primeiro vamos dividir os polinômios,

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}.$$

Fazendo $u = 2x-1$ ou $x = \dfrac{u+1}{2}$, temos $du = 2\,dx$, assim

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx &= \int \left(1+\frac{x-1}{(2x-1)^2+2}\right)\,dx \\
&= x+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{u+1}{2}-1}{u^2+2}\,du = x+\frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du \\
&= x+\frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du-\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du \\
&= x+\frac{1}{8}\ln|u^2+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+k \\
&= x+\frac{1}{8}\ln|(2x-1)^2+1|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+k.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos considerar integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}\,dx\,,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Teorema

Sejam $m,\ n,\ p,\ a,\ b,\ c,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0\,.$ Então existem $A, B, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+D}{ax^2+bx+c}\,.$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$.

Observe que $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Dividindo obtemos

$$\frac{x^5+x+1}{x^3-8}=x^2+\frac{8x^2+x+1}{x^3-8}=x^2+\frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Pelo método de frações parciais,

$$\frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Então, $8x^2 + x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$. Fazendo $x = 2$ obtemos $35 = 12A$ ou $A = \dfrac{35}{12}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = 4A - 2C$ ou $C = \dfrac{16}{3}$. Fazendo $x = 1$, obtemos $10 = 7A - B - C$ ou $B = \dfrac{61}{12}$. Assim,

$$\int \frac{8x^2 + x + 1}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx = \frac{35}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2+2x+4}\,dx$$

$$= \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\int \frac{61x + 64}{x^2+2x+4}\,dx.$$

Para calcular a última integral, escrevemos $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$ e fazemos $u=x+1$ ou $x=u-1$ e $du=dx$; portanto,

$$\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx=\int \frac{61x+64}{(x+1)^2+3}\,dx=\int \frac{61(u-1)+64}{u^2+3}\,du$$

$$=61\int \frac{u}{u^2+3}\,du+3\int \frac{1}{u^2+3}\,du=\frac{61}{2}\ln(u^2+3)+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+k$$

$$=\frac{61}{2}\ln((x+1)^2+3)+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+k.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{35}{12}\ln|x-2|+\frac{61}{24}\ln((x+1)^2+3)+\frac{3}{12\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+k.$$