Problemas para modelagem em aula - 2023

1ª Questão

Considere uma empresa que fabrica um produto cuja demanda é tipicamente sazonal, isto é, ao longo do ano há fortes oscilações na demanda. Para operar neste mercado, a empresa pode utilizar os seguintes procedimentos:

a) demitir operários no início de um mês;
b) contratar operários no início de um mês;
c) utilizar até 35 horas extras por mês de cada operário, cuja jornada normal mensal totaliza 175 horas;
d) estocar o produto de um mês para o mês seguinte;
e) retardar o atendimento de parte da demanda de um mês para o mês seguinte.

Admita conhecidos:
f) o custo da demissão de um operário (despesa para atender a legislação trabalhista); c_d
g) o custo da contratação de um operário (treinamento); c_c
h) o custo médio do homem-hora extra; $chhe$
i) o custo de manter uma unidade do produto em estoque de um mês para o mês seguinte; c_e
j) a demanda em cada mês do próximo ano; d_j, $j = 1, \ldots, 12$
k) o número de operários e a quantidade de produto em estoque ao fim deste ano; nt_0, e_0
l) o salário mensal médio de um operário (sem incluir o adicional por horas extras); s_m
m) o número de homens-horas para fabricar uma unidade do produto; $nhhp$
n) o desconto concedido por unidade do produto cuja entrega é retardada para o mês seguinte ao da demanda; Δp
o) o número máximo de unidades que podem ser mantidas em estoque de um mês para o mês seguinte; E_{max}
p) o estoque desejado ao fim do próximo ano. $\bar{e}_{12}$

Proponha um modelo matemático para definir o programa de produção e a política de recursos humanos da empresa para o próximo ano.

Sugestão de variáveis de decisão
- número de operários demitidos no início do mês j - nd_j
- número de operários contratados no início do mês j - nc_j
- número de operários trabalhando no mês j - nt_j
- número total de homens horas extras no mês j - $nhhe_j$
- produção no mês j - p_j
- estoque ao fim do mês j - e_j
- parte da demanda do mês j que é entregue no mês (j+1) dat_j

Data 27 / 06 / 2023

Função Objetivo

Custos com a Mão de Obra +

Custos com a Manutenção do Produto em Estoque de um mês para o mês seguinte +

Desconto por Entrega Atrasada da Demanda

Detalhando os Custos com a Mão de Obra

Custos de Demissão

Custos com Contratação

Salário mensal

Horas extras

Como escrever a função objetivo em termos das variáveis de decisão (e dos parâmetros apresentados no enunciado da questão) ?

Data 27 / 06 / 2023

Função Objetivo C, a ser minimizada

$$C = \sum_{j=1}^{12} c_d\, nd_j + \sum_{j=1}^{12} c_c\, nc_j + \sum_{j=1}^{12} s_m\, nt_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{12} chhe \cdot nhhe_j + \sum_{j=1}^{11} c_e\, e_j + \sum_{j=1}^{12} \Delta p\, dat_j$$

Restrições

1 - balanço mensal de mão de obra decorrente de demissões ou contratações;

2 - relação entre a produção mensal, mão de obra disponível naquele mês e a utilização de horas extras,

3 - relação entre produção, demanda, estoque e atraso na entrega da demanda,

4 - número máximo de horas extras no mês,

5 - limite na capacidade de armazenamento;

6 - condição de contorno para o estoque no fim do horizonte de planejamento.

7 - Espaço das variáveis

Como escrever essas restrições em termos das variáveis de decisão?

Data 27 / 06 / 2023

Expressões Matemáticas para as Restrições

1- Balanço mensal de mão de obra

$$nt_1 = nt_0 - nd_1 + nc_1$$

$$nt_j = nt_{j-1} - nd_j + nc_j \qquad j = 2, \ldots, 12$$

2- Relação entre a produção mensal, mão de obra disponível naquele mês e a utilização de horas extras

$$p_j \leq (175\, nt_j + nhhe_j)/nhhp\,, \quad j = 1, \ldots, 12$$

3- Relação entre produção, demanda, estoque e atraso na entrega na demanda

$$p_j + e_{j-1} + dat_j = d_j + e_j + dat_{j-1}$$

$$j = 1, \ldots, 12$$

Observação

Diante da falta de informações, admitir que $dat_0 = 0$, e, eventualmente impor $dat_{12} = 0$.

4- Número máximo de horas extras

$$nhhe_j \leq 35\, nt_j\,, \quad j = 1, \ldots, 12$$

5- Limite na capacidade de armazenamento

$$e_j \leq E_{max}\,, \quad j = 1, \ldots, 11$$

6- Condição de contorno para o estoque no fim do horizonte de planejamento

$$e_{12} = \bar{e}_{12}$$

7- Espaço das Variáveis

$nt_j, nd_j, nc_j \geq 0$, inteiro ; $j = 1, \ldots, 12$

$p_j, e_j, dat_j, nhhe_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, 12$

2ª Questão

Uma empresa de navegação precisa de um navio durante 5 anos e pode afretá-lo por períodos múltiplos de 6 meses. Ela sabe que haverá oscilações no mercado de frete e antevê quanto pagará pelo afretamento do navio entre o início do semestre **i** e o fim do semestre **j**, para quaisquer **i = 1, 2, ... 10** e **j = i, ... 10**. Estabeleça o modelo matemático para determinar a programação de afretamento do navio.

Sugestão de variáveis de decisão

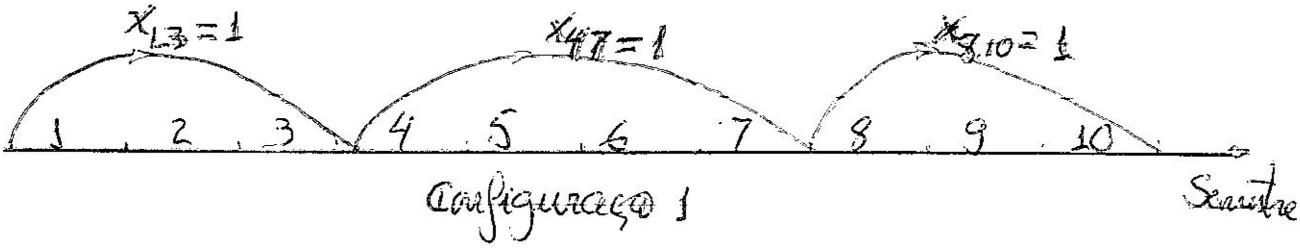
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se um navio é afretado do início do semestre } i \text{ ao fim do semestre } j \text{; e} \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, 10$; $j = 1, \ldots, 10$

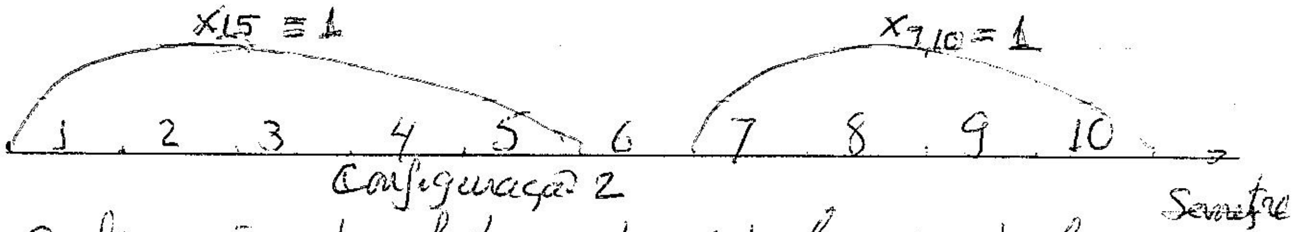
Seja f_{ij} o valor que a empresa paga pelo afretamento de um navio do início do semestre i até o fim do semestre j.

Para entender a restrição que as variáveis de decisão x_{ij} devem satisfazer, observem as configurações de afretamento indicadas na figura seguinte.

Data 27 / 06 / 2023



Configuração 1



Configuração 2

Configurações de afretamento viável e inviável

A primeira configuração de afretamento é viável pois garante que a empresa irá dispor de um navio durante todos os 10 semestres do horizonte de programação. Na configuração 2, a empresa não terá navio afretado no sexto semestre, caracterizando, portanto, uma seleção inviável.

Assim, é preciso impor que em qualquer semestre m, $1 \leq m \leq 10$ haja um contrato de afretamento vigente, isto é, que vigore a partir do início de um semestre i, $i \leq m$ e que se estenda até o fim de um semestre j, $j \geq m$.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m}^{10} x_{ij} = 1 \qquad , m = 1, 2, \ldots, 10$$

Espaço das variáveis $\quad x_{ij} = 0$ ou 1

variáveis binárias

Função objetivo: custo total de afretamento C_{af}, a ser minimizado

$$C_{af} = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} f_{ij} x_{ij}$$

Data 27/06/2023

3ª Questão

Duas ligas metálicas, A e B, são feitas de quatro metais distintos, I, II, III, IV, de acordo com a especificação apresentada na tabela a seguir:

Ligas	Especificações
A	no máximo 80% de I no máximo 30% de II no mínimo 50% de IV
B	entre 40% e 60% de II no mínimo 30% de III no máximo 70% de IV

Os quatro metais são extraídos de três minérios diferentes, cujas percentuais em peso destes metais, quantidades máximas dos minérios e custos por toneladas são tabelados a seguir:

		Componentes					
Minério	Quantidade máxima (t)	I	II	III	IV	Outros	Preço em R$/t
1	1000	20	10	30	30	10	75,00
2	2000	10	20	30	30	10	90,00
3	3000	5	5	70	20	0	120,00

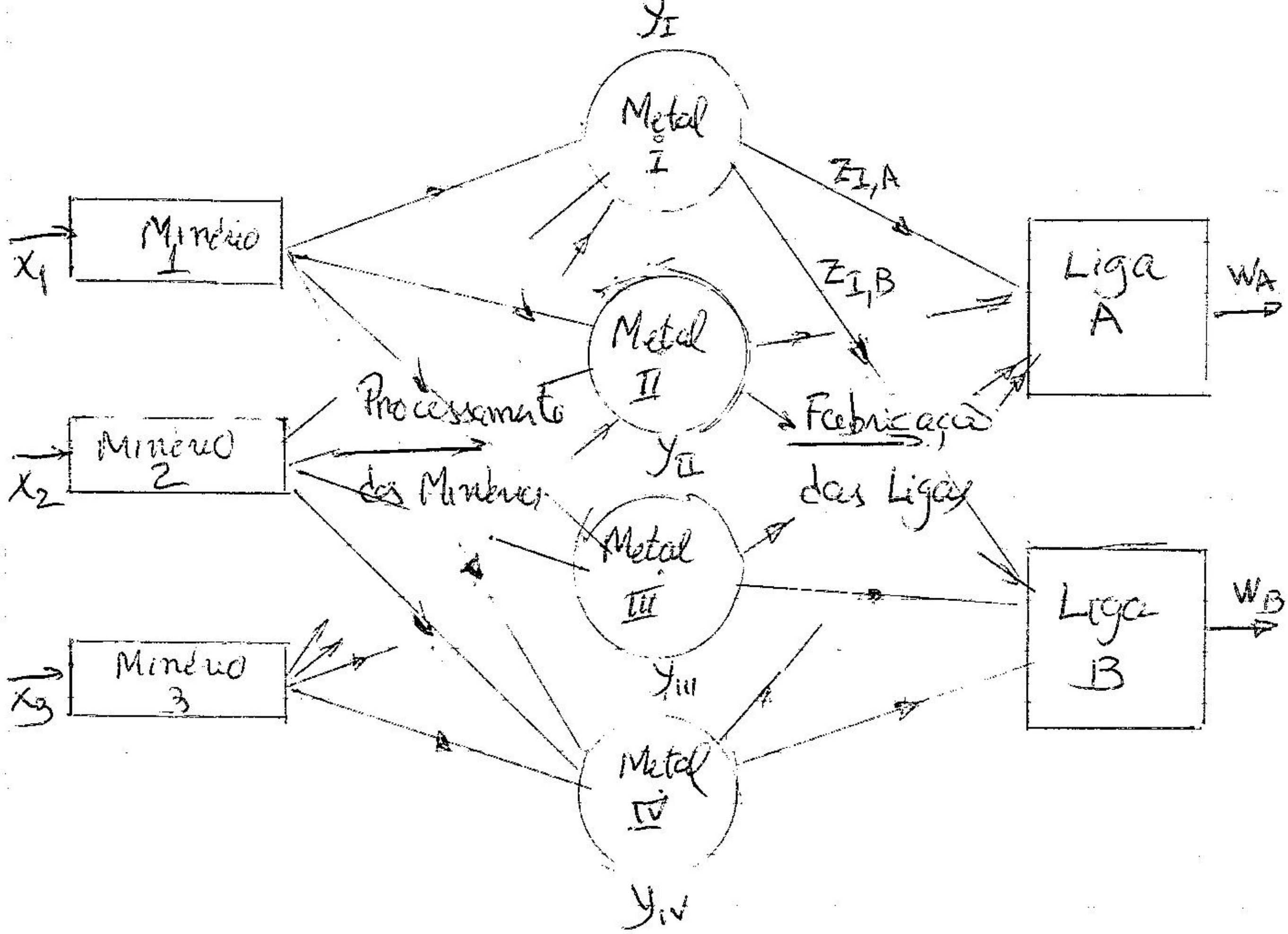
Considerando que: os custos de processamento dos minérios 1, 2 e 3 sejam R$120,00/t, R$100,00/t e R$110,00/t respectivamente; que os custos de fabricação das ligas A e B sejam R$150,00/t e R$135,00/t; os preços de venda das ligas A e B sejam R$750,00 e R$600,00 por tonelada, respectivamente, formular o problema como sendo um modelo de programação linear, escolhendo a função objetivo apropriada que fará o melhor uso das informações dadas.

Sugestão de variáveis de decisão

- quantidade a ser comprada e processada de cada minério: x_1, x_2 e x_3
- quantidade obtida de cada metal após o processamento dos minérios: y_I, y_{II}, y_{III} e y_{IV}
- quantidade de cada metal utilizado na fabricação de cada liga: $z_{I,A}$, $z_{II,A}$, $z_{III,A}$, $z_{IV,A}$, $z_{I,B}$, $z_{II,B}$, $z_{III,B}$, $z_{IV,B}$
- quantidade fabricada de cada liga: w_A e w_B

Data 27/04/2023

A figura abaixo ilustra, de forma esquemática, o processamento dos minérios e a fabricação das ligas



Restrições

1 - Quantidade obtida de cada metal pela composição dos minérios processados

$$y_I = 0{,}20\,x_1 + 0{,}10\,x_2 + 0{,}05\,x_3$$

$$y_{II} = 0{,}10\,x_1 + 0{,}20\,x_2 + 0{,}05\,x_3$$

$$y_{III} = 0{,}30\,x_1 + 0{,}30\,x_2 + 0{,}70\,x_3$$

$$y_{IV} = 0{,}30\,x_1 + 0{,}30\,x_2 + 0{,}20\,x_3$$

Data 27 / 06 / 2023

2 - Quantidade obtidade de cada liga

$$W_A = z_{I,A} + z_{II,A} + z_{III,A} + z_{IV,A}$$

$$W_B = z_{I,B} + z_{II,B} + z_{III,B} + z_{IV,B}$$

3 - Restrições referentes às composições das ligas

$z_{I,A} \leq 0{,}8\, W_A \quad z_{II,A} \leq 0{,}3\, W_A \quad z_{IV,A} \geq 0{,}5\, W_A$

$z_{II,B} \geq 0{,}4\, W_B \quad , \quad z_{II,B} \leq 0{,}6\, W_B$

$z_{III,B} \geq 0{,}3\, W_B \quad , \quad z_{IV,B} \leq 0{,}7\, W_B$

4 - Limitação das quantidades de cada metal utilizadas para a fabricação das ligas

$$z_{I,A} + z_{I,B} \leq y_I$$

$$z_{II,A} + z_{II,B} \leq y_{II}$$

$$z_{III,A} + z_{III,B} \leq y_{III}$$

$$z_{IV,A} + z_{IV,B} \leq y_{IV}$$

Data 27 / 06 / 2023

5 - Restrição referente à quantidade disponível de cada minério

$x_1 \leq 1000$; $x_2 \leq 2000$; $x_3 \leq 3000$.

6. Espaço das variáveis
todas variáveis reais não negativas

Função objetivo - Lucro L a ser maximizado

$$L = (750 - 150)\, w_A + (600 - 135)\, w_B +$$

$$- (75 + 120) x_1 - (90 + 100) x_2 - (120 + 110) x_3$$

4ª Questão

Uma pequena oficina de usinagem fabrica um conjunto formado por 4 peças diferentes e dispõe de 6 máquinas diferentes para executar tal serviço. A máquina i pode fabricas n_{ij} peças do tipo j por dia, se alocada exclusivamente à produção desta peça.

a) Admitindo que seja desprezível o tempo de ajuste de qualquer máquina, quando passa da usinagem de um tipo de peça para outro, formule um modelo matemático para alocar o tempo de cada máquina à produção das diferentes peças.

b) Admitindo, porém, que o tempo de ajuste de qualquer máquina para passar da peça 3 para qualquer tipo de peça (e reciprocamente) fosse muito grande, como deveria ser distribuído o tempo de cada máquina para maximizar o número de conjuntos produzidos num único dia.

Sugestão de variáveis de decisão

4a) fração do tempo disponível na máquina i que é dedicada à usinagem da peça j, x_{ij} ; $i = 1, \ldots, 6$; $j = 1, \ldots, 4$.

Quantidade produzida da peça j ; x_j , $j = 1, \ldots, 4$

quantidade de conjuntos montados: y

Data
27 / 06 / 2023

Restrições (Caso 4a)

1 - Restrição para as frações do tempo de máquina i dedicadas às usinagens das 4 peças (dos 4 tipos de peças)

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} \leq 1 \quad , \; i = 1, \ldots, 6$$

2 - Restrição para a quantidade de peças obtidas

$$x_j \leq \sum_{i=1}^{6} \alpha_{ij} n_{ij}$$

3 - Restrição para a quantidade de conjuntos montados

$$y = \min \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

4 - Espaço das variáveis

$$\alpha_{ij} \geq 0 \, , \; i = 1, \ldots, 6 \; ; \; j = 1, \ldots, 4$$

$$x_j \geq 0 \, , \text{ inteiro} \quad , \; y \geq 0 \, , \text{ inteiro}$$

Função objetivo - quantidade de conjuntos montados y a ser maximizada

A maximização de y com a restrição $y = \min \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ pode ser substituída pela maximização de y com restrições algébricas $y \leq x_1$, $y \leq x_2$, $y \leq x_3$ e $y \leq x_4$

Data 27/06/2023

4b) a variável x_{i3} do item 4a deve ser substituída por uma variável binária

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{ se a máquina } i \text{ é dedicada à usinagem da peça 3; e} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

Restrições para 4b

A restrição 1 do caso (4a) é substituída pela restrição:

$$x_{i1} + x_{i2} + z_i + x_{i4} \leq 1 \quad , \quad i = 1, \dots, 6$$

A restrição 2 do caso (4a) é substituída pelas restrições:

para as peças 1, 2 e 4 permanece

$$x_j \leq \sum_{i=1}^{6} x_{ij}\, n_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, 4$$

para a peça 3

$$x_3 \leq \sum_{i=1}^{6} n_{i3}\, z_i$$

A restrição 3 é a mesma do caso (4a); na restrição 4, correspondente ao espaço das variáveis, há apenas a substituição de $x_{i3} \geq 0$ por $z_{i3} = 0$ ou 1. A função objetivo é a mesma do caso (4a).

Data 27 / 06 / 2023

5ª Questão

Uma empresa está analisando o investimento em seis diferentes projetos para os próximos quatro anos. Os lucros esperados (medidas em termos de valor presente) de cada projeto bem como os respectivos desembolsos ao longo dos 4 anos são apresentados na tabela abaixo; os recursos disponíveis para aplicação nestes projetos, em cada um dos 4 anos, também são apresentados na tabela.

a) Elabore o modelo matemático correspondente ao problema de decisão acima formulado.
b) Como ficaria o modelo, caso:
   b1) os projetos 2 e 5 não pudessem ser conduzidos simultaneamente?
   b2) os projetos 1 e 4 tivessem que ser conduzidos simultaneamente?
c) Como ficaria o modelo se recursos disponíveis mas não investidos num dado ano, pudessem ser transferidos para o ano seguinte?
d) Como ficaria o modelo se a empresa pudesse investir parcialmente em qualquer projeto, caso em que o lucro esperado e os desembolsos anuais seriam proporcionais à fração de projeto escolhida?

PROJETO	DESEMBOLSO ANUAL (R$ x 10^6) ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	LUCRO ESPERADO (R$ x 10^6)
1	10,5	14,4	2,2	2,4	32,40
2	8,3	12,6	9,5	3,1	35,80
3	10,2	14,2	5,6	4,2	17,75
4	7,2	10,5	7,5	5,0	14,80
5	12,3	10,1	8,3	6,3	18,20
6	9,2	7,8	6,9	5,1	12,35
RECURSOS DISPONÍVEIS (R$ x 10^6)	60,0	70,0	35,0	20,0	

Sugestão de variáveis de decisão:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ se a empresa decide investir no projeto } j \text{; e} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

Restrições para o item a)

1 - Desembolso total com os projetos, em cada ano i, não pode exceder a quantidade de recursos disponíveis no ano i

Data 27 / 06 / 2023

$$\sum_{j=1}^{6} d_{ij} x_j \leq R_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (*)$$

sendo d_{ij} o desembolso com o projeto j no ano i e R_i os recursos disponíveis no ano i (valores da tabela acima)

Por comparação com o item(c), admite-se aqui que eventuais sobras de recursos do ano i não estarão disponíveis para o ano seguinte.

2. Espaço das variáveis $x_j = 0$ ou 1

(novamente variáveis binárias

Função objetivo

Admitindo-se que no cálculo do lucro esperado de cada projeto já foram considerados os recursos investidos, a função objetivo é o lucro total esperado, L

$$L = \sum_{j=1}^{6} l_j x_j$$

onde l_j é o lucro esperado do projeto j.

item (b)

b1) Incluir restrição $x_2 + x_5 \leq 1$

Data 27 / 06 / 2023

b2) Incluir restrição $x_1 - x_4 = 0$

item (c)

As restrições (*) do item (a) são substituídas pelas relações:

$$\sum_{j=1}^{6} d_{1j} x_j + S_1 = R_1$$

$$S_1 \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{6} d_{ij} x_j + S_i = R_i + S_{i-1} \qquad i = 2, 3, 4$$

$$S_i \geq 0 \ , \ i = 2, 3, 4$$

item d - variáveis de decisão α_j, fração do projeto j em que a empresa investe

$$\sum_{j=1}^{6} d_{ij} \alpha_j \leq R_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\alpha_j \geq 0 \ , \ \alpha_j \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, 6$$

$$L = \sum_{j=1}^{6} l_j \alpha_j$$

Data 27 / 06 / 2023

6ª Questão

Uma empresa de navegação quer programar o carregamento de um navio porta-contêineres em uma viagem na rota costa lesta da América do Sul-Europa. O navio tem capacidade para **N** contêineres dos quais $\mathbf{N_r}$ são refrigerados. Admitindo-se ordenados os portos da rota, de 1 a n, são conhecidas as demandas de transporte de contêineres "dry", d_{ij}, e refrigerados, r_{ij}, entre 2 portos i e j, i<j; as taxas de frete para esses transportes são fd_{ij} e fr_{ij}, respectivamente. A empresa tem ainda que utilizar o navio para realocar seus contêineres vazios. A oferta ou demanda de contêineres vazios no porto i da rota é representada por v_i. Se $v_i>0$, v_i representa a oferta de contêineres vazios; em caso contrário, v_i representa a demanda de contêineres vazios. É óbvio que em cada porto, há demanda ou oferta de contêineres vazios do tipo "dry" e do tipo refrigerado. Propor um modelo matemático para fazer a programação do carregamento do navio.

Sugestão de variáveis de decisão:

quantidade de contêineres cheios, com carga dry (refrigerada) embarcados no porto i e descarregados no porto j : x_{ij}^d (x_{ij}^r)

quantidade de contêineres vazios do tipo dry (refrigerado) embarcados no porto i e descarregados no porto j : y_{ij}^d (y_{ij}^r)

Restrições

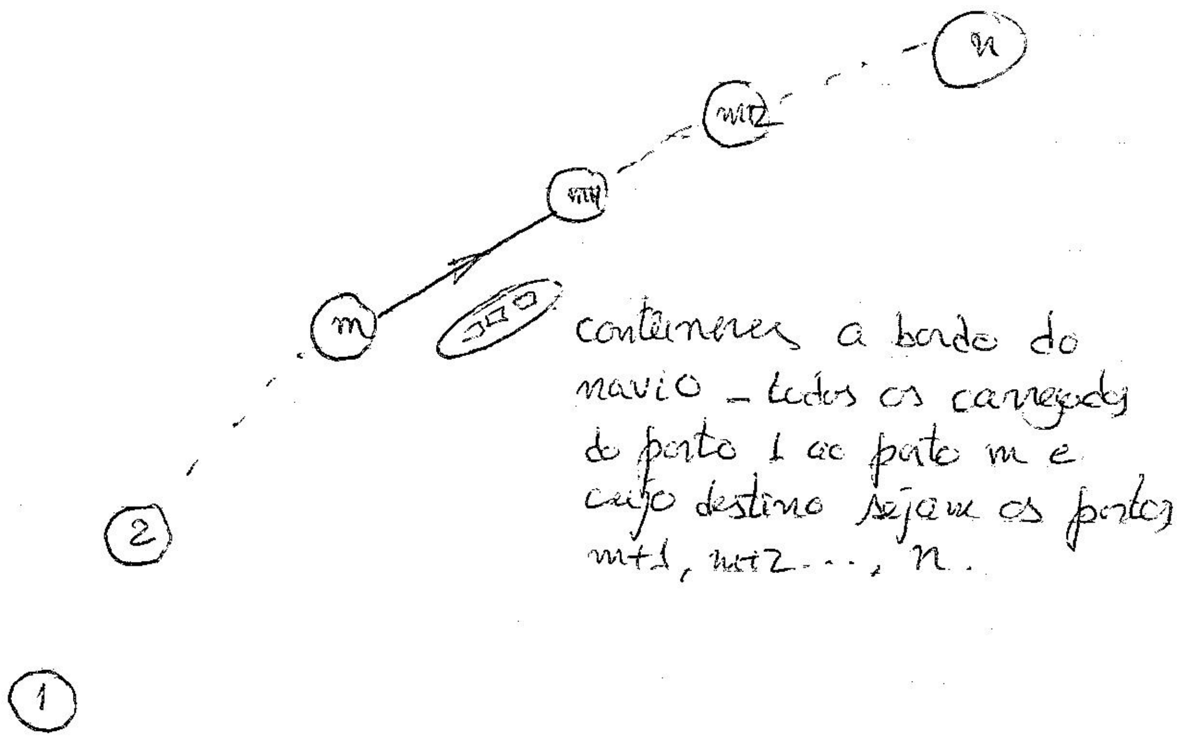
1 — Quantidade de contêineres cheios embarcados no porto i e descarregados no porto j está limitada superiormente pela demanda de carga entre esses dois portos. Isto é:

$$x_{ij}^d \le d_{ij} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$
$$x_{ij}^r \le r_{ij} \qquad j = i+1, \dots, n$$

Data 27 / 06 / 2023

2_ Restrição de espaço disponível no navio

Considere um trecho genérico da viagem entre os portos m e $m+1$, conforme indicado na figura abaixo e verifique quais contêineres estão no navio neste trecho da viagem: são todos aqueles cujo porto de embarque vai de 1 a m e cujo porto de desembarque vai de $m+1$ a n.



2.1 Restrição referente ao espaço para contêineres cheios com carga refrigerada

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^{r} \le N_r \quad , m = 1, 2, \dots, n-1$$

Data
27 / 06 / 2023

2.2 Restrição para o número total de contêineres no navio

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} (x_{ij}^{d} + x_{ij}^{r} + y_{ij}^{d} + y_{ij}^{r}) \leq N$$

$$m = 1, 2, \ldots, n-1$$

3. Restrições referentes à oferta e à demanda de contêineres vazios, do tipo dry e do tipo reefer, nos portos da rota

3.1 Para portos com oferta de contêineres vazios $v_i^d \geq 0$ ou ($v_i^r > 0$)

$$\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}^{d} \leq v_i^d \quad \left(\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}^{r} \leq v_i^r \right)$$

3.2 Para portos com demanda de contêineres vazios $v_i^d < 0$ (ou $v_i^r < 0$)

$$\sum_{k=1}^{i-1} y_{ki}^{d} = -v_i^d \quad \left(\sum_{k=1}^{i-1} y_{ki}^{r} = -v_i^r \right)$$

4. Espaço das variáveis
$x_{ij}^d, x_{ij}^r, y_{ij}^d, y_{ij}^r \geq 0$, inteiros

Função objetivo - Receita da viagem (a ser maximizada)

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (fd_{ij} x_{ij}^{d} + fr_{ij} x_{ij}^{r})$$

Data 27/06/2023

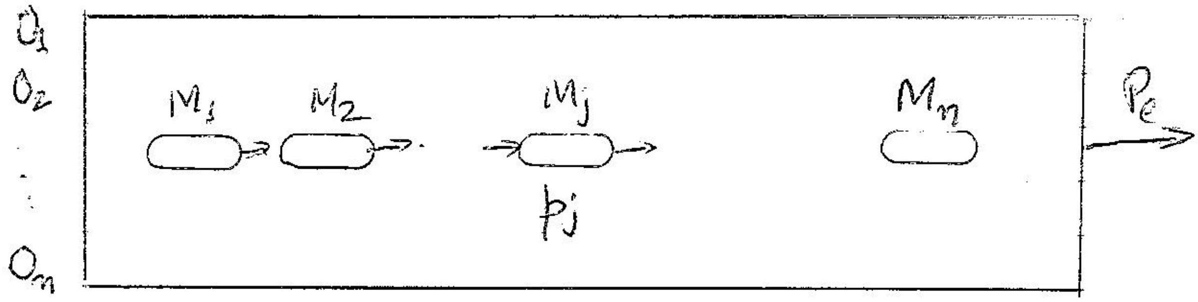
7ª Questão

Problema de designação para reduzir o gargalo em uma linha de produção. Admita que haja n homens aos quais devem ser designadas n funções em uma linha de produção. Se a tarefa j for atribuída ao homem i, este poderá processar a_{ij} itens por unidade de tempo. O gargalo é aquele homem que na designação efetuada tem a menor produtividade. Estabeleça um modelo de programação linear para maximizar a produção.

Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se o operário } i \text{ é designado para a máquina } j; \text{ e} \\ 0, \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

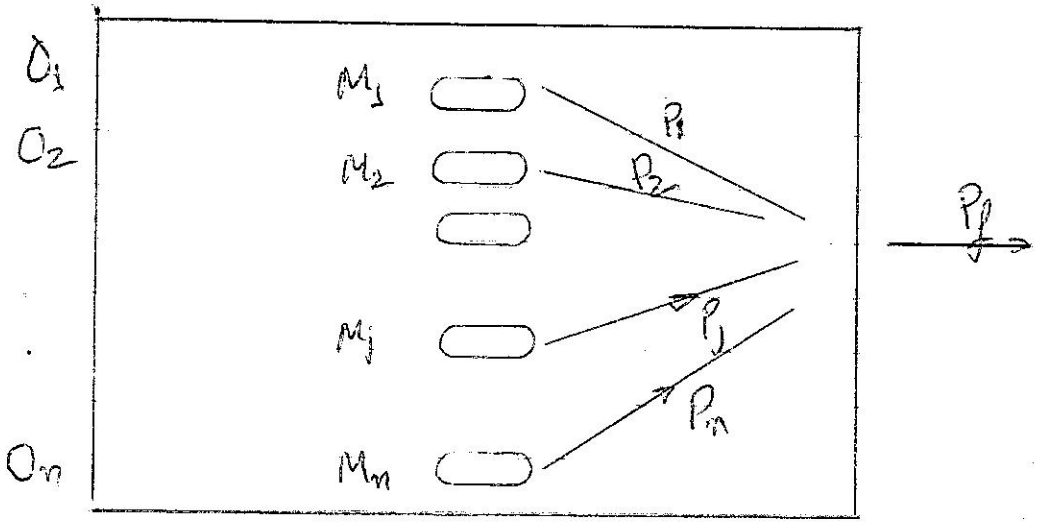
Seja p_j a produção potencial da máquina j e P_L a produção da linha, conforme ilustrado na figura abaixo



Designação de n operários a n máquinas de uma linha de produção

Antes de apresentar o modelo matemático para o problema acima, considere-se o problema análogo da designação de n operários para n máquinas trabalhando em paralelo, conforme ilustrado na figura da página seguinte. Na figura referida, P_1 é a produção da máquina 1, P_2 a produção da máquina, P_j a produção da máquina j e P_n a produção da máquina n. A produção da fábrica P_f é a soma das produções das n máquinas.

Data
27 / 06 / 2023



As restrições de designação são as mesmas para os 2 problemas

1 - Cada operário i é designado para operar uma única máquina
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \ i = 1, \ldots, n$$

2 - Cada máquina é acionada por um único operário
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \ j = 1, \ldots, n$$

Também o espaço das variáveis x_{ij} é o mesmo para os 2 problemas $x_{ij} = 0$ ou 1

Para o caso das máquinas em paralelo
$$P_f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P_j$$

Para o caso das máquinas em linha
$$P_L = \min \{ P_1 , P_2 , \ldots , P_n \}$$