	UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO Escola de Engenharia de São Carlos	
	Disciplinas: SEL 0364 - Controle Não Linear Aplicado SEL 5772 - Controle Não Linear	
	Professora: Vilma Alves de Oliveira	
	Aluno: GABARITO	
	Nº USP:	Data: 27/06/2023
Avaliação: Parte 1		
Orientações gerais: 1- Sua avaliação consta de 4 questões, somando 10 pontos. É proibido utilizar consultas. 2- Justificar as respostas e mostrar os cálculos realizados.		

1. (3 pontos) O pêndulo invertido exibido na Figura 1 é representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x_1 = \theta$ o ângulo da haste com a vertical e as funções f e b dadas por:

$$f(x_1, x_2) = \frac{(M + m)g\text{sen}(x_1) - mlx_2^2\text{sen}(x_1)\text{cos}(x_1)}{\frac{4}{3}(M + m)l - ml\text{cos}^2(x_1)} \quad (2)$$

e

$$b(x_1, x_2) = \frac{\text{cos}(x_1)}{\frac{4}{3}(M + m)l - ml\text{cos}^2(x_1)}. \quad (3)$$

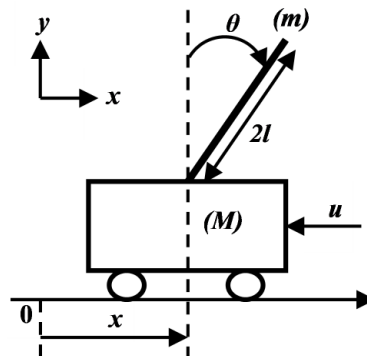


Figura 1: Pêndulo invertido.

Para manter a posição da haste (x_1) em uma referência x_d , sendo o erro $e = x_1 - x_d$, defina a superfície de deslizamento $s = \lambda e + \dot{e}$, com $\lambda > 0$ uma constante de projeto. Pede-se:

- a) Mostre que a primeira derivada em relação ao tempo da superfície pode ser escrita como $\dot{s} = h + bu$. Explícite a função h . Calcule a lei de controle equivalente u_{eq} .

Para a superfície de deslizamento $s = \lambda e + \dot{e}$, a sua primeira derivada é calculada por:

$$\dot{s} = \lambda \dot{e} + \ddot{e} = \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_d) + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_d \quad (4)$$

Utilizando que $\dot{x}_1 = x_2$ e $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ de (1):

$$\dot{s} = \lambda(x_2 - \dot{x}_d) + f + bu - \ddot{x}_d = \lambda(x_2 - \dot{x}_d) + f - \ddot{x}_d + bu \tag{5}$$

Portanto, analisando (5) conclui-se que $\dot{s} = h + bu$, sendo $h = \lambda(x_2 - \dot{x}_d) + f - \ddot{x}_d$. O sinal de controle equivalente é calculado fazendo $\dot{s} = 0$:

$$h + bu_{eq} = 0, \tag{6}$$

$$u_{eq} = -b^{-1}h = -b^{-1}[\lambda(x_2 - \dot{x}_d) + f - \ddot{x}_d]. \tag{7}$$

- b) Seja o sinal de controle descontínuo $u_d = -b^{-1}k\text{sign}(s)$, com $k > 0$ uma constante de projeto. Mostre que a lei de controle $u = u_{eq} + u_d$ satisfaz a condição:

$$\dot{V} \leq -\eta|s|, \tag{8}$$

sendo V uma candidata Lyapunov e $\eta > 0$.

Dica: escolha $V = \frac{1}{2}s^2$ e lembre-se que $s \cdot \text{sign}(s) = |s|$.

O sinal de controle completo é dado por:

$$u = u_{eq} + u_d = -b^{-1}h - b^{-1}k\text{sign}(s) = -b^{-1}[h + k\text{sign}(s)]. \tag{9}$$

Para $V = \frac{1}{2}s^2$ então $\dot{V} = s\dot{s}$. Assim:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(h + bu) = s(h - bb^{-1}[h + k\text{sign}(s)]). \tag{10}$$

$$\dot{V} = s(-k\text{sign}(s)) = -k|s|. \tag{11}$$

Note que em (11), para satisfazer a condição $\dot{V} \leq -\eta|s|$ basta escolher $\eta \leq k$. Assim:

$$\dot{V} = -k|s| \leq -\eta|s|. \tag{12}$$

- c) A utilização da função *sign* na construção da lei de controle descontínua leva a um problema típico no projeto de controladores *sliding mode*. Qual é este problema e seus principais impactos? Escreva uma lei de controle alternativa que contribua na solução deste problema. Existe alguma outra forma de contornar o problema gerado pela descontinuidade da função *sign* na lei de controle tradicional?

O uso de uma lei de controle descontínua leva ao fenômeno conhecido como *chattering*, que se caracteriza como oscilações de alta frequência e amplitude no sinal de controle. Essas oscilações surgem devido ao fato de que a lei é descontínua em $s = 0$, fazendo com que \dot{s} tenha sinais opostos em cada lado da superfície para satisfazer a condição de deslizamento. Os principais impactos são: Desgaste de atuadores, excitação de altas dinâmicas não modeladas, desperdício de energia, etc.

Para atenuação do *chattering* pode-se substituir a função sinal por funções contínuas semelhantes como a função *sat* ou a tangente hiperbólica. Com isso, o *chattering* é reduzido, mas a precisão do controlador é penalizada. Como exemplo, tem-se:

$$u_d = -b^{-1}k\text{sat}\left(\frac{s}{\phi}\right) \tag{13}$$

Outra forma de contornar o problema do *chattering* sem que haja penalização do desempenho do controlador é o uso de *sliding mode* de ordens superiores, sendo o de 2ª ordem o mais utilizado (algoritmo *twisting*, *super-twisting*, entre outros).

2. (2 pontos) Um sistema *fuzzy* possui como entradas as variáveis x_1 e x_2 e uma única saída y . As entradas e saída são caracterizadas por três variáveis linguísticas: Pequeno (P), Médio (M) e Grande (G). As funções de pertinência são exibidas na Figura 2, enquanto a base de regras é exibida na Tabela 2. O sistema usa o processo de inferência Mamdani, uso de multiplicação para o conectivo E entre as regras, acumulação por soma e defuzzyficação por centro de área. Considerando uma situação em que as entradas são $x_1 = 2$ e $x_2 = 8$, faça o que se pede.

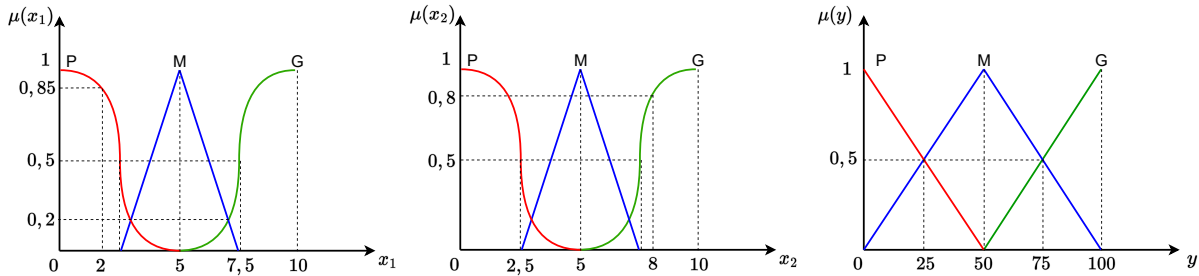


Figura 2: Funções de pertinência das entradas e saída do sistema *fuzzy* dado.

Tabela 2: Regras para o sistema *fuzzy* dado.

		x_2		
		P	M	G
x_1	P	M	P	P
	M	M	P	G
	G	P	G	G

a) Indique quais regras estão ativas para essa combinação de entradas.

Da Figura 2, note que para a entrada $x_1 = 2$ apenas a variável linguística P possui pertinência não nula, enquanto que para $x_2 = 8$, apenas a variável linguística G possui valor de pertinência não nula. Portanto, as regras ativas são dadas pelas combinações dessas variáveis linguísticas. Apenas uma regra encontra-se ativa para essa combinação de entradas, destacada na Tabela 2:

Se x_1 é P e x_2 é G então y é P.

b) Na Figura 3, represente graficamente a saída *fuzzy* do sistema.

Para $x_1 = 2$ e $x_2 = 8$, o grau de pertinência das variáveis linguísticas são $\mu_P(x_1 = 2) = 0,85$ e $\mu_G(x_2 = 8) = 0,8$, como pode ser visto na Figura 2. Portanto, para o conectivo E entre os antecedentes da regra, utiliza-se a interseção (mínimo):

$$\mu_P = \min \{ \mu_P(x_1 = 2), \mu_G(x_2 = 8) \} = \min \{ (0.85, 0.8) \} = 0.8 \tag{14}$$

Como apenas uma regra está ativa, ela indicará o resultado do sistema *fuzzy* nessa situação. Portanto, o resultado será toda a variável linguística P da saída y cujo valor é menor ou igual a 0.8, conforme exibido na Figura 3.

c) Calcule o valor estimado da saída y .

Dica: a defuzzyficação por centro de área é dada por $CDA = \frac{\sum \mu(x_k)x_k}{\sum \mu(x_k)}$. Discretize a saída em passos de 5 unidades.

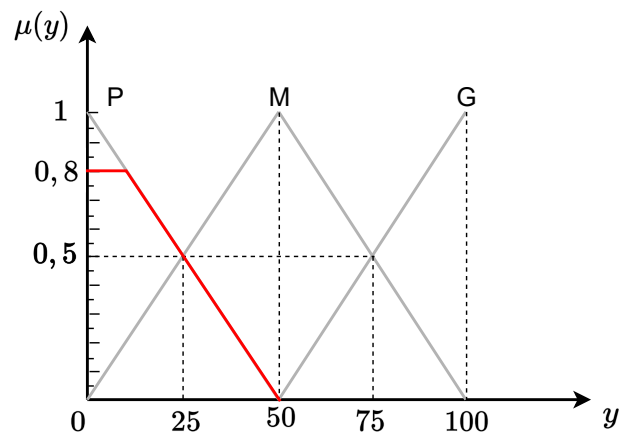


Figura 3: Construção gráfica da saída do sistema *fuzzy* dado.

Como solicitado, a saída será discretizada em passos de 5 unidades, o que corresponde a 10 pontos entre 0 e 50. O cálculo da pertinência para alguns valores de y pode ser feito com o auxílio da equação da reta que define a variável linguística de saída P:

$$\mu(y) = 1 - \frac{y}{50}. \quad (15)$$

A saída pelo método do centro de área será:

$$CDA = \frac{(0 \cdot \mu(0)) + (5 \cdot \mu(5)) + (10 \cdot \mu(10)) + \dots + (50 \cdot \mu(50))}{\mu(0) + \mu(5) + \mu(10) + \dots + \mu(50)}. \quad (16)$$

$$CDA = \frac{(0 \cdot 0,8) + (5 \cdot 0,8) + (10 \cdot 0,8) + (15 \cdot 0,7) + (20 \cdot 0,6) + (25 \cdot 0,5) + (30 \cdot 0,4) + (35 \cdot 0,3) + (40 \cdot 0,2) + (45 \cdot 0,1) + (50 \cdot 0)}{0,8 + 0,8 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0}. \quad (17)$$

$$CDA = 15,77 \quad (18)$$

3. (3 pontos) Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{cases} \quad (19)$$

a) Encontre o conjunto de pontos de equilíbrio.

Os pontos de equilíbrio podem ser calculados através da condição $\dot{x} = 0$, ou seja, $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$. Utilizando (19):

$$x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 = 0 \quad (20)$$

$$4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \quad (21)$$

Portanto, pode-se perceber que o conjunto de pontos de equilíbrio do sistema são:

$$P_1 = (0 \ 0) \quad (22)$$

$$P_2 = (0 \ \sqrt{2}) \quad (23)$$

$$P_3 = (0 \ -\sqrt{2}) \quad (24)$$

$$P_4 = (\sqrt{2} \ 0) \quad (25)$$

$$P_5 = (-\sqrt{2} \ 0) \quad (26)$$

b) Faça a linearização pelo primeiro método de *Lyapunov* e classifique os pontos de equilíbrio.

Utilizando o primeiro método de *Lyapunov*, a matriz A fica:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x_1^2 - x_2^2) - 2 & -6x_1x_2 \\ 10x_1x_2 & 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Substituindo os valores de x_1 e x_2 para os pontos de equilíbrios obtém-se:

$$A_{P_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad (28)$$

$$A_{P_2} = A_{P_3} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 4 \text{ e } \lambda_2 = -8, \quad (29)$$

$$A_{P_4} = A_{P_5} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 4 \text{ e } \lambda_2 = 8. \quad (30)$$

Para o ponto de equilíbrio P_1 , ambos autovalores possuem parte real não nula. Portanto, trata-se de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Além disso, como ambos possuem parte real negativa e parte imaginária nula, o ponto de equilíbrio é um sumidouro do tipo nó estável. Para os pontos de equilíbrio P_2 e P_3 , ambos autovalores possuem parte real não nula. Portanto, trata-se de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Além disso, como um autovalor possui parte real positiva, trata-se de um ponto de equilíbrio do tipo sela. Para os pontos de equilíbrio P_4 e P_5 , ambos autovalores possuem parte real positiva. Portanto, trata-se de um ponto de equilíbrio instável. Além disso, como ambos autovalores possuem parte imaginária nula, conclui-se que são nós instáveis.

c) Utilize a função candidata abaixo

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

e o Princípio de Invariância de *LaSalle* para mostrar que toda trajetória iniciada dentro da bola de raio $\sqrt{2}$ centrada na origem irá convergir para a origem.

Para a candidata *Lyapunov* dada, sua derivada de primeira ordem será:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \tag{31}$$

Substituindo (19) em (31):

$$\dot{V}(x) = 2x_1 [x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2] + 2x_2 [4x_1^2x_2 + x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2)] \tag{32}$$

$$\dot{V}(x) = 2 (x_1^2 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2 - 2). \tag{33}$$

De (33), é possível perceber que \dot{V} é semi-definida negativa, de forma que não é possível garantir a estabilidade assintótica da origem. Note que \dot{V} é localmente negativa no interior a bola de raio $\sqrt{2}$.

Seja o conjunto $\omega_\ell = \{x \in \mathbb{R} : V(x) < \ell\}$, em que $\ell > 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$. A região de $\dot{V}(x) \leq 0$ é compreendida por $2 (x_1^2 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2 - 2) \leq 0$, ou seja, $(x_1^2 + x_2^2 - 2) \leq 0$. Para $\ell = k$, com $k < 2$, o conjunto ω_ℓ pode ser redefinido como: $\omega_\ell = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 - k \leq 0\}$. Tem-se que ω_ℓ representa o interior de uma circunferência centrada em $(0, 0)$ de raio $\sqrt{2}$. Defina-se um conjunto $E = \{x \in \omega_\ell : \dot{V}(x) = 0\}$. $\dot{V}(x) = 0 \rightarrow 2 (x_1^2 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0$. Portanto, considerando os pontos no interior da bola de raio $\sqrt{2}$, o conjunto E é dado por $x_1 = x_2 = 0$, isto é, a origem. Em um conjunto invariante, qualquer trajetória iniciada dentro do conjunto deve permanecer no conjunto para todo $t \geq 0$. Assim, como $(0, 0)$ é o maior e único conjunto invariante em E , a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Pelo Teorema de *LaSalle*, toda trajetória iniciada dentro de ω_ℓ irá convergir para a origem.

4. (2 pontos) As equações de Euler para uma espaçonave rígida rotativa são dadas por:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3 \end{cases} \tag{34}$$

sendo ω_1 a ω_3 as componentes de velocidade angular do vetor ω em relação aos eixos principais, u_1 a u_3 são os torques aplicados nestes eixos e J_1 a J_3 os respectivos momentos de inércia.

a) Mostre que com $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ a origem $\omega = \mathbf{0}$ é estável. Ela é assintoticamente estável?

Para a candidata *Lyapunov* dada, sua derivada de primeira ordem será:

$$\dot{V}(\omega) = J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3\omega_3\dot{\omega}_3 \tag{35}$$

Substituindo (34) em (35):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\omega) &= J_1\omega_1 \left(\frac{(J_2 - J_3)\omega_2\omega_3}{J_1} \right) + J_2\omega_2 \left(\frac{(J_3 - J_1)\omega_3\omega_1}{J_2} \right) + J_3\omega_3 \left(\frac{(J_1 - J_2)\omega_1\omega_2}{J_3} \right) \\ \dot{V}(\omega) &= (J_2 - J_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{V}(\omega) &= (J_2 - J_3 + J_3 - J_1 + J_1 - J_2)\omega_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{V}(\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

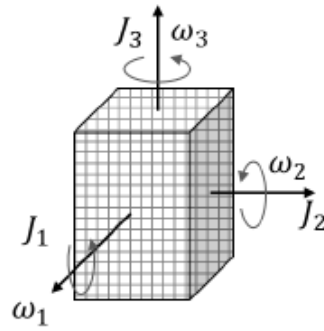


Figura 4: Diagrama da espaçonave rígida rotativa

Portanto, uma vez que \dot{V} é semi-definida negativa, pode-se concluir que a origem é estável. Todavia, a estabilidade assintótica não pode ser garantida.

- b) Considere as entradas de torque como o controle de realimentação dado por $u_i = -k_i\omega_i$, com $i = 1 : 3$, com k_i sendo constantes positivas. Mostre que, nessas condições, a origem é assintoticamente estável.

Dica: Use a candidata Lyapunov $V(\omega) = \frac{1}{2} (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)$.

Substituindo as entradas de torque em (34) obtém-se:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 - k_1\omega_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 - k_2\omega_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 - k_3\omega_3 \end{cases} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (35):

$$\dot{V}(\omega) = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2 - k_3\omega_3^2. \quad (38)$$

Note que \dot{V} é definida negativa. Assim, pode-se concluir que a origem é assintoticamente estável.