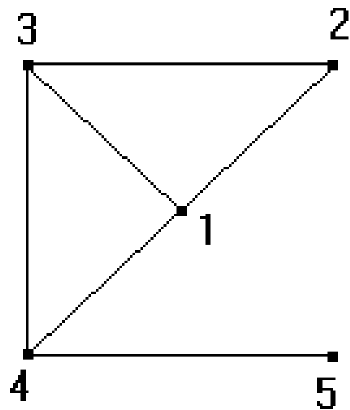
Grafos: árvores geradoras mínimas

SCC0216/SCC503 Modelagem Computacional em Grafos/Algoritmos e Estruturas de Dados 2

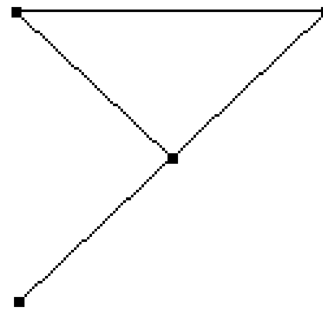
Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

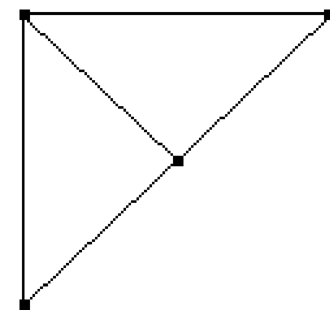
Sub-grafo

Dado um grafo $G_1(V_1,A_1)$, um grafo $G_2(V_2,A_2)$ é um sub-grafo de G_1 se V_2 está contido em V_1 e A_2 está contido em A_1



(a)

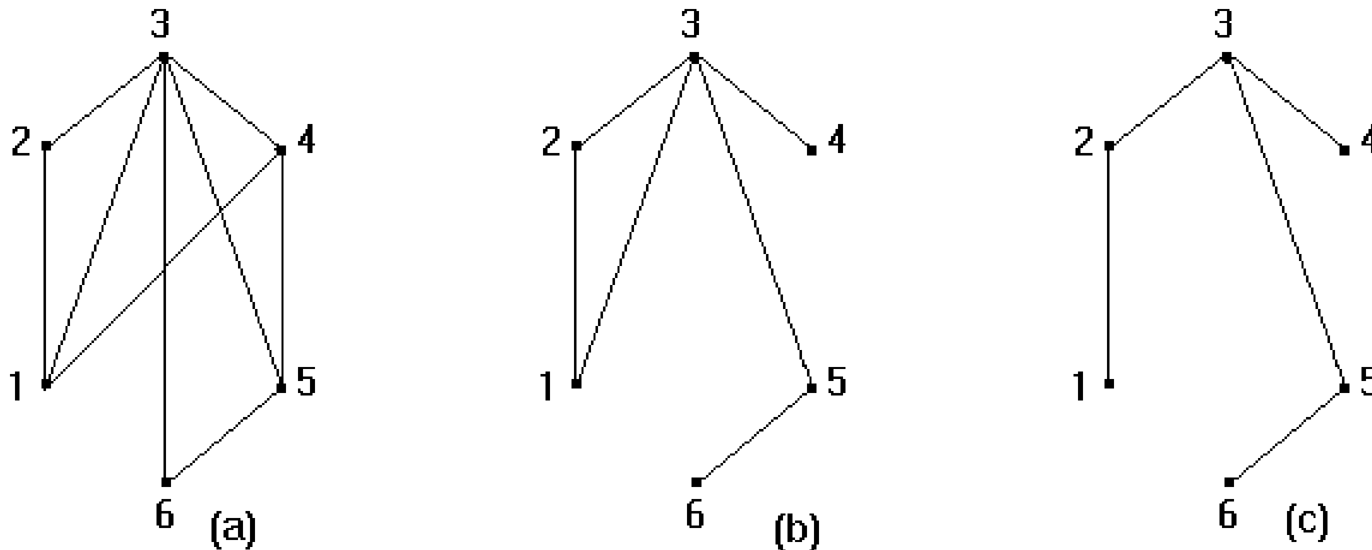

(b)


(c)

os grafos em (b) e (c) são sub-grafos do grafo em (a)

Sub-grafo gerador

Sub-grafo Gerador de um grafo **$G_1(V_1,A_1)$** é um sub-grafo **$G_2(V_2,A_2)$** de **G_1** tal que **$V_1 = V_2$**. Quando o sub-grafo gerador é uma árvore, ele recebe o nome de árvore geradora



(b) e (c) são sub-grafos geradores do grafo em (a)
(c) é árvore geradora de (a) e (b)

Sub-grafo gerador de custo mínimo

- Formalmente

  - Dado um grafo não orientado G(V,A)
    - em que uma função *w*: $A \rightarrow \Re^{+}$ define os custos das arestas
    - queremos encontrar um sub-grafo gerador mínimo conexo T de G tal que, para todo sub-grafo gerador conexo T´ de G

$$\sum_{a \in T} w(a) \leq \sum_{a \in T'} w(a)$$

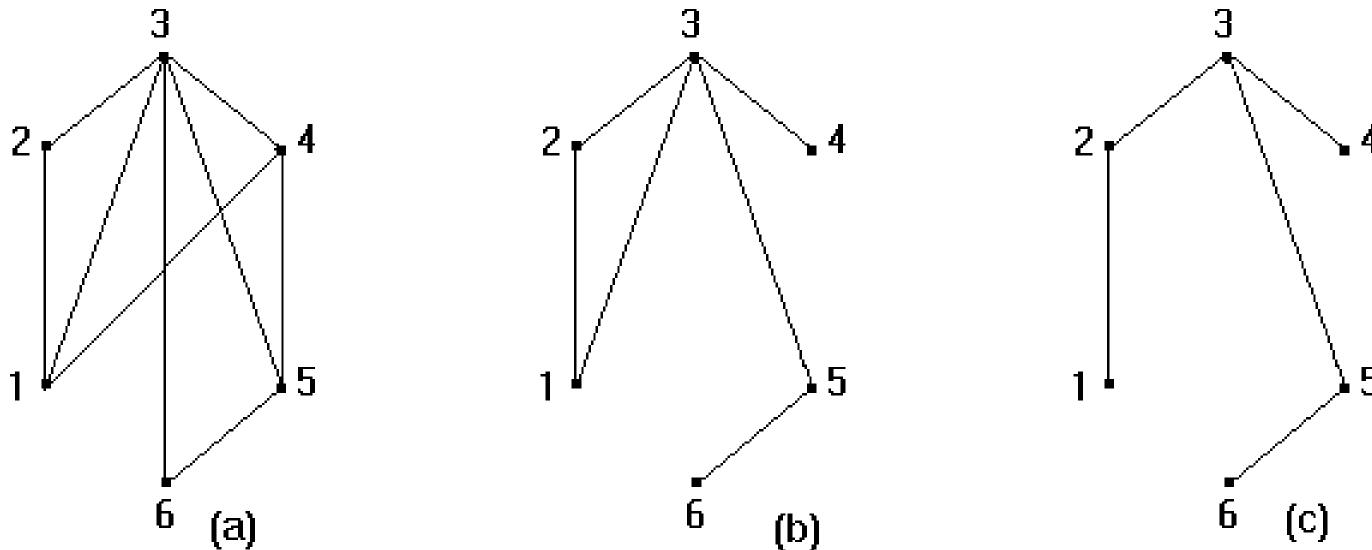
Árvore geradora mínima

- Claramente, o problema só tem solução se G é conexo
  - A partir de agora, assumimos G conexo

- Também não é difícil ver que a solução para esse problema será sempre uma árvore
  - Por que?

Sub-grafo gerador

Sub-grafo Gerador de um grafo **$G_1(V_1,A_1)$** é um sub-grafo **$G_2(V_2,A_2)$** de **G_1** tal que **$V_1 = V_2$**. Quando o sub-grafo gerador é uma árvore, ele recebe o nome de árvore geradora



(b) e (c) são sub-grafos geradores do grafo em (a)

(c) é árvore geradora de (a) e (b)

Árvore geradora mínima

- Claramente, o problema só tem solução se G é conexo
  - A partir de agora, assumimos G conexo
- Também não é difícil ver que a solução para esse problema será sempre uma árvore
  - Basta notar que T não terá ciclos pois, caso contrário, poderíamos obter um outro sub-grafo T´, ainda conexo e com custo menor do que o custo de T, removendo o ciclo (i.e., uma das arestas que o compõem)

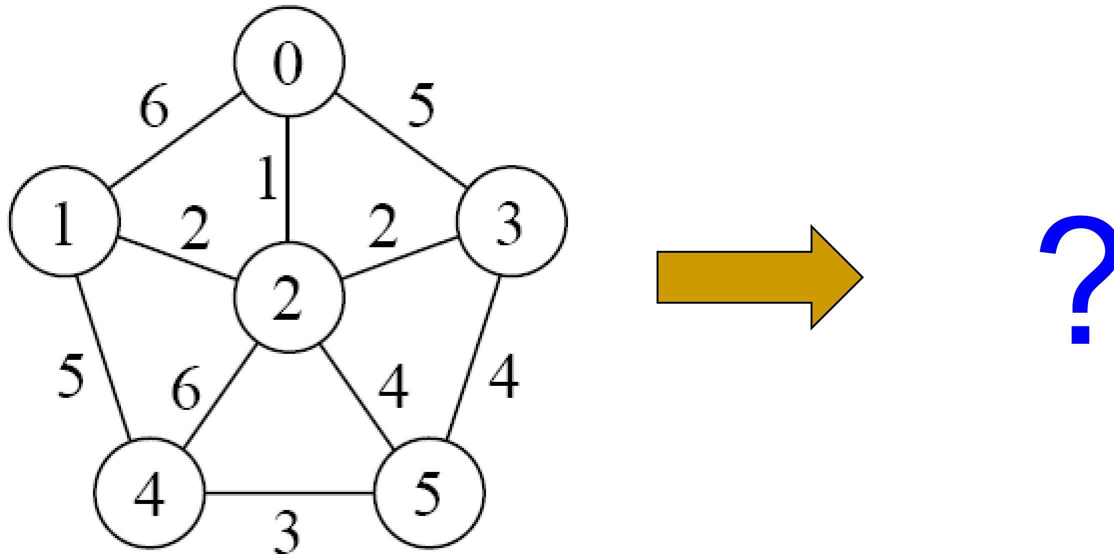
Árvore geradora mínima

- Árvore Geradora de um grafo G é um sub-grafo de G que contém todos os seus vértices e, ainda, é uma árvore

- Arvore Geradora Mínima é a árvore geradora de um grafo valorado cuja soma dos pesos associados às arestas é mínimo, i.e., é uma árvore geradora de custo mínimo

Árvore geradora mínima

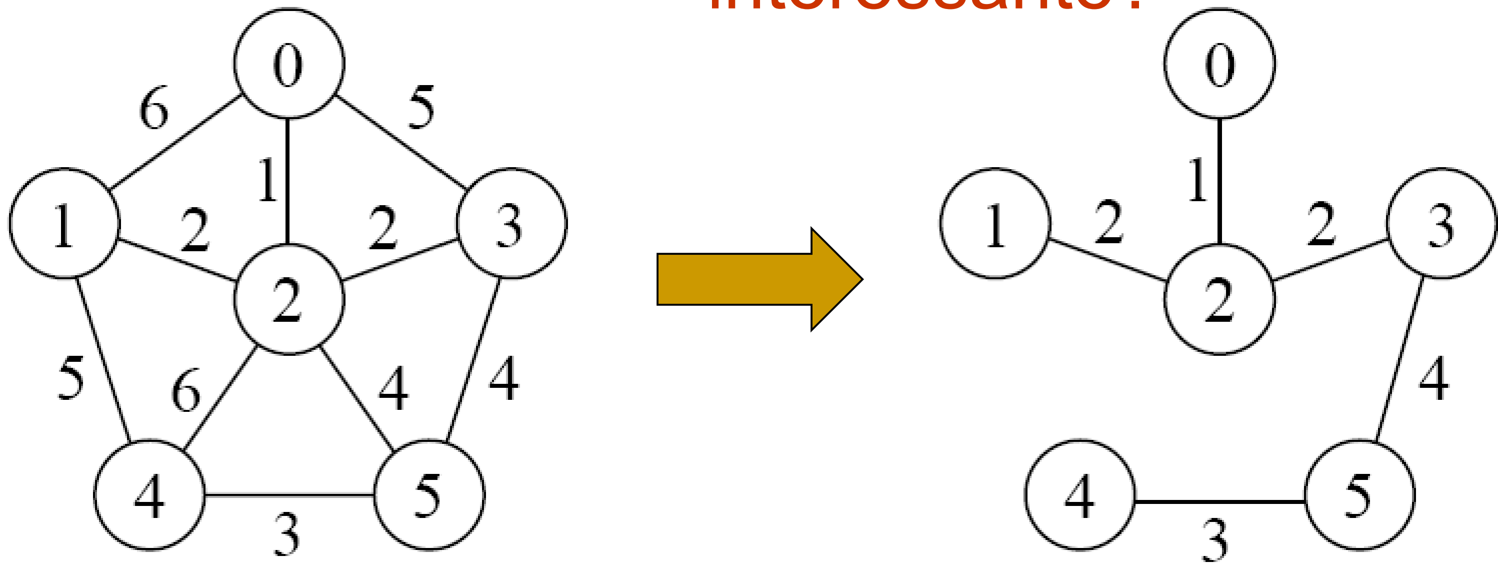
- Exemplo



Árvore geradora mínima

- Exemplo

Porque esse problema é interessante?



Por que é um problema interessante?

- Suponha que queremos montar uma rede de distribuição de energia elétrica para interligar N localidades em uma cidade
  - Cada conexão direta entre localidades *i* e *j* tem um custo associado (preço do cabeamento, mão de obra, tempo, etc.)
  - Nem todas as localidades precisam ser ligadas diretamente, desde que todas tenham acesso à energia elétrica

- Como determinar as linhas distribuição de forma a minimizar o custo total de distribuição de energia?

Árvore geradora mínima

- Como encontrar a árvore geradora mínima de um grafo G ?
  - Algoritmo genérico: ilustra a estratégia ‘gulosa’
  - Algoritmo de Prim
  - Algoritmo de Kruskal

Árvore geradora mínima

Algoritmo Genérico

```
procedimento genérico(G)
A = ∅
enquanto A não define uma árvore geradora
    encontre uma aresta (u,v) segura para A
    A = A ∪ {(u,v)}
retorna A
```

G(V,E) conexo, não direcionado, ponderado

E – conjunto de arestas

Árvore geradora mínima

Algoritmo Genérico

```
procedimento genérico(G)
A = ∅
enquanto A não define uma árvore geradora
    encontre uma aresta (u,v) segura para A
    A = A ∪ {(u,v)}
retorna A
```

Abordagem 'gulosa' -> adiciona uma aresta (u,v) '*segura*' a cada iteração, de modo que a árvore continue sendo uma árvore

Árvore geradora mínima

Algoritmo Genérico

```
procedimento genérico(G(V,E))
A = ∅
enquanto A não define uma árvore geradora
    encontre uma aresta (u,v) segura para A
    A = A ∪ {(u,v)}
retorna A
```

Condição invariante do laço: a cada iteração, a árvore obtida até o momento é um subconjunto de uma árvore geradora mínima

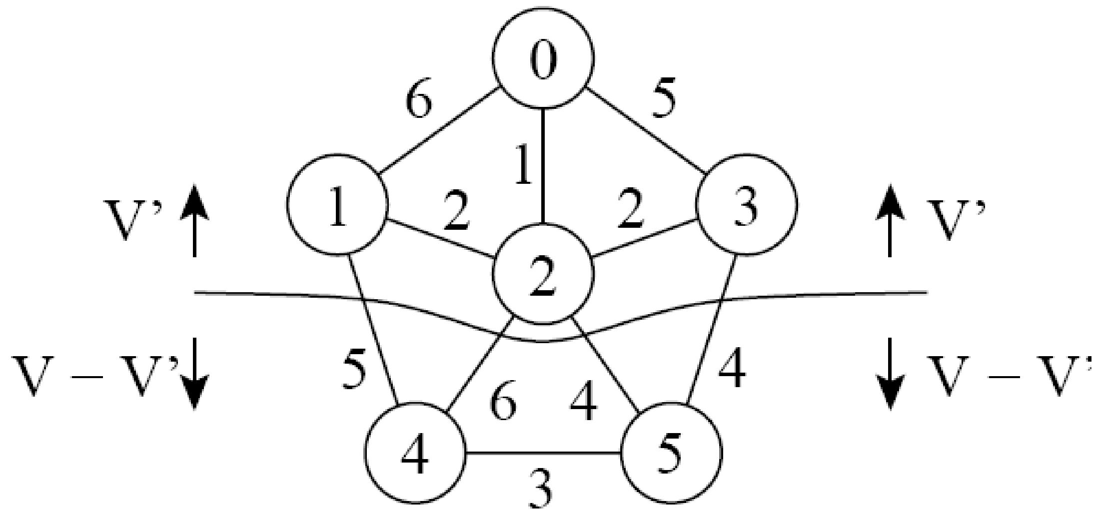
aresta *segura* (u,v): respeita o invariante, i.e., não introduz um ciclo, e não poderia ser substituída por outra aresta equivalente de custo menor

Árvore geradora mínima

- Alguns conceitos

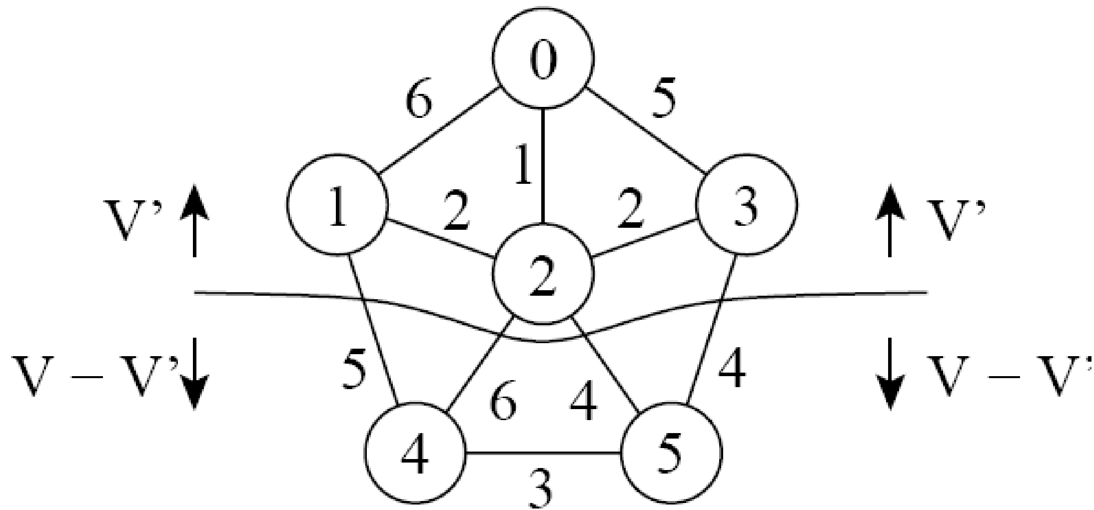
  - Um corte (V’; V - V’) de um grafo não direcionado G=(V,E) é uma partição de V

  - Uma aresta **segura** (u,v) cruza o corte se um dos vértices extremos pertence a V’ e o outro pertence a V - V’



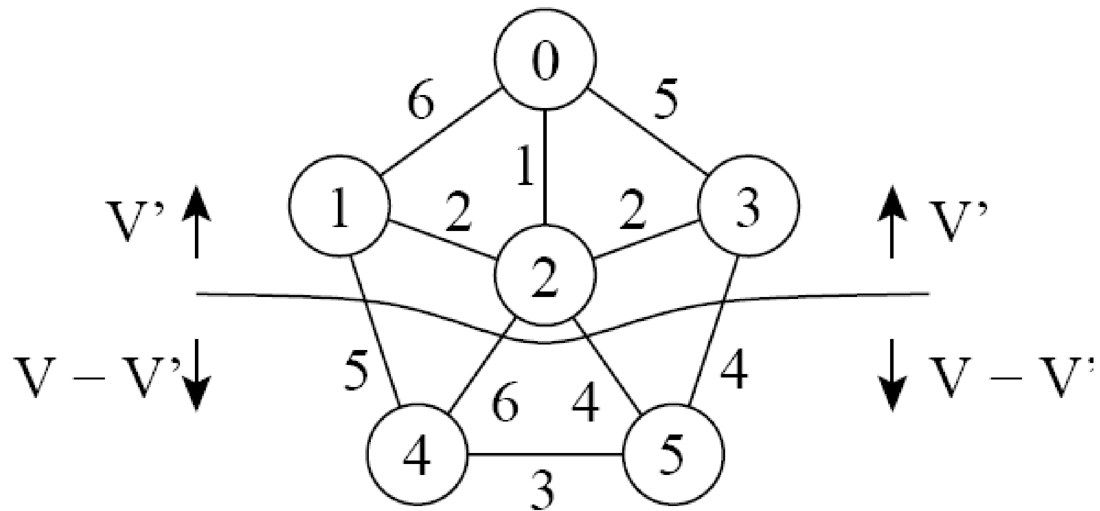
Árvore geradora mínima

- Alguns conceitos
  - Um corte *respeita* um conjunto A de arestas se nenhuma aresta em A cruza o corte
  - Uma aresta que cruza o corte e tem custo mínimo em relação a todas as arestas cruzando o corte é denominada uma *aresta leve*



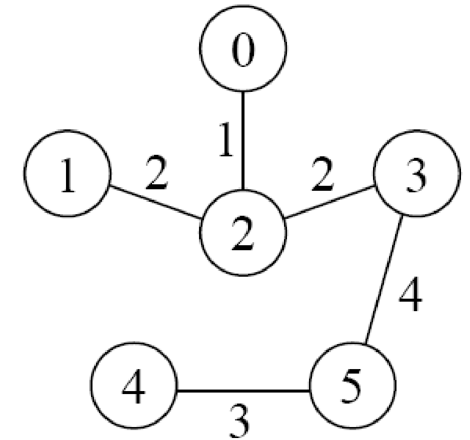
Árvore geradora mínima

- Exemplo

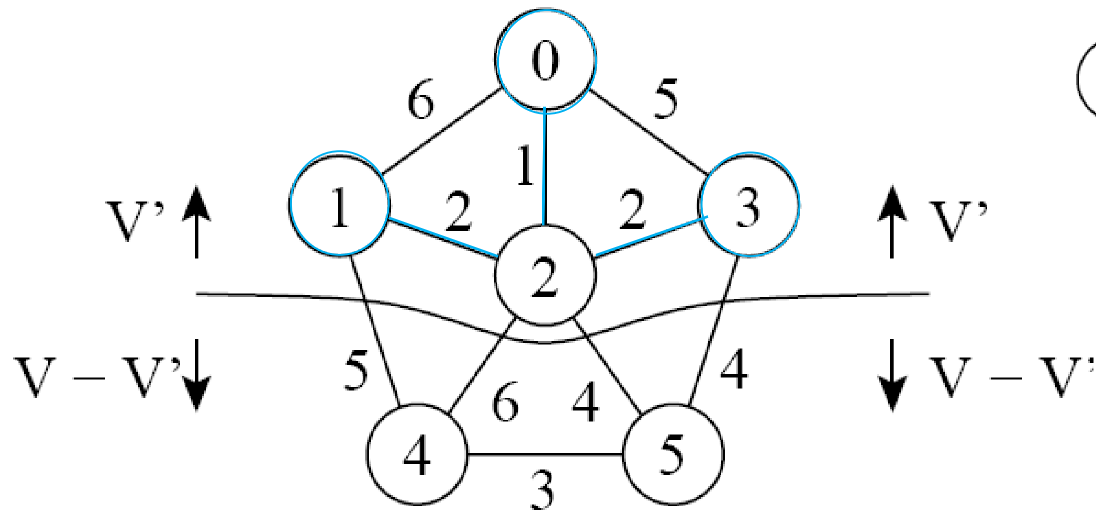


- Se T é uma árvore geradora mínima de um sub-grafo e há um corte (V';V - V') que respeita T, a aresta leve (u,v) é uma aresta segura para T

Árvore geradora mínima



- Exemplo



- Se T é uma árvore geradora mínima de um sub-grafo e há um corte (V';V - V') que respeita T, a aresta leve (*u*,*v*) é uma aresta segura para T

Algoritmo de Prim

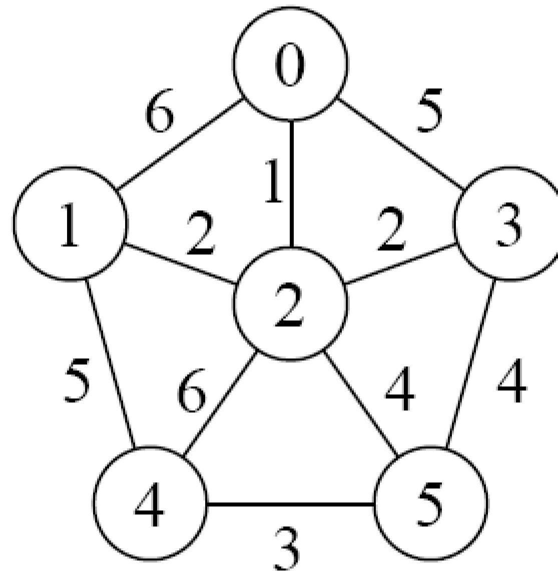
```
procedimento Prim(G)

   escolha um vértice s para iniciar a árvore
   enquanto há vértices fora da árvore
      selecione uma aresta segura
      insira a aresta e seu vértice na árvore
```

Ponto importante do algoritmo: seleção de uma aresta segura
Outro ponto: os vértices que já estão na árvore definem um corte de V

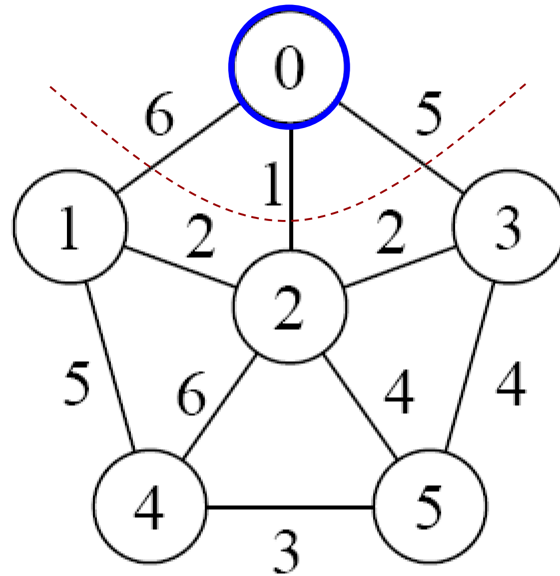
Algoritmo de Prim

- Exemplo: iniciando o algoritmo pelo vértice 0



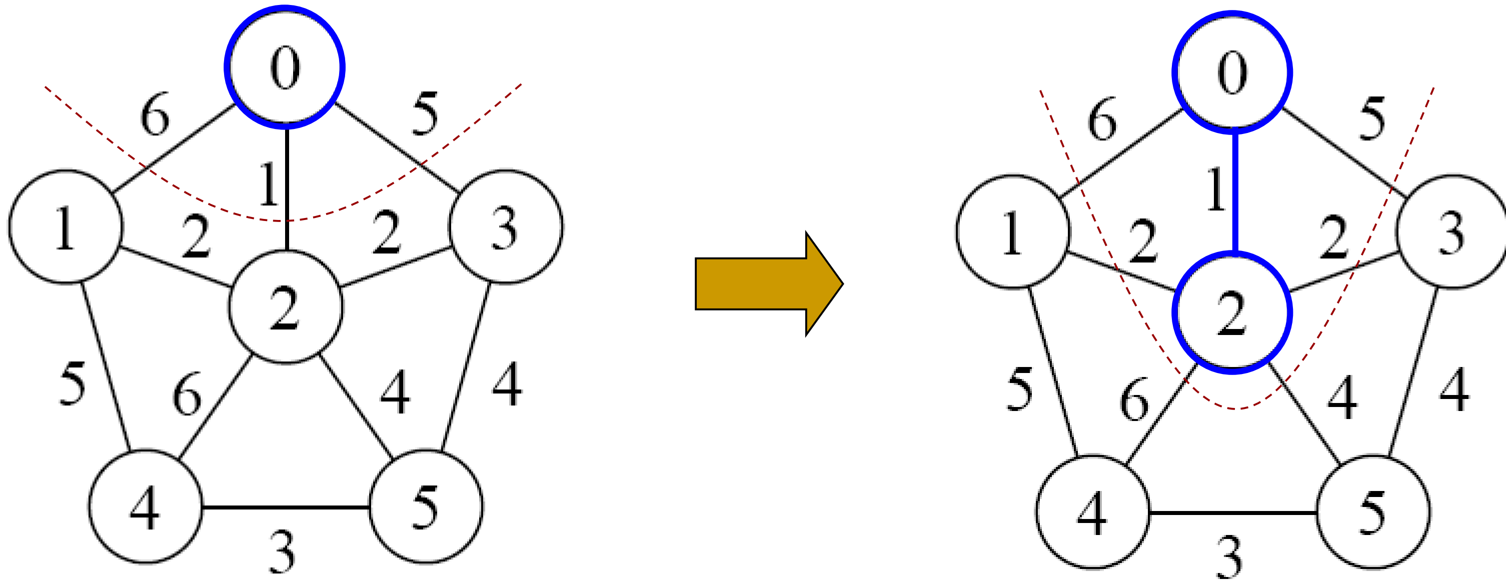
Algoritmo de Prim

- Exemplo: iniciando o algoritmo pelo vértice 0

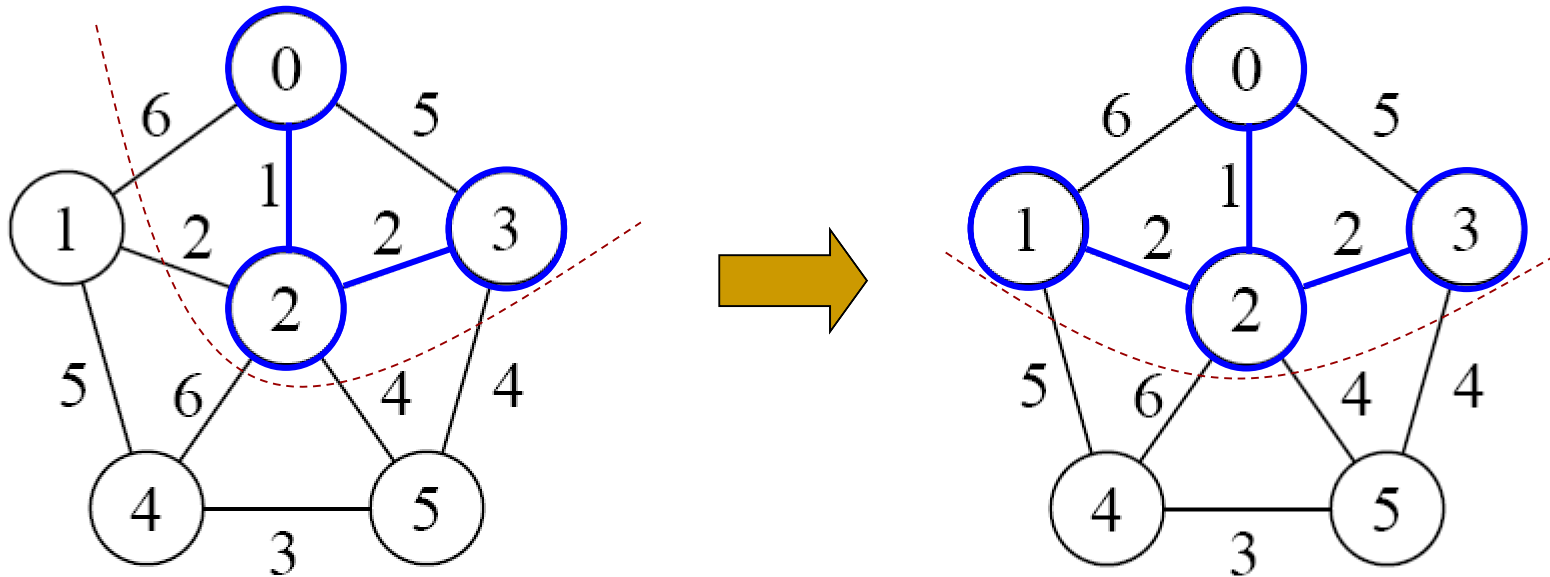


Algoritmo de Prim

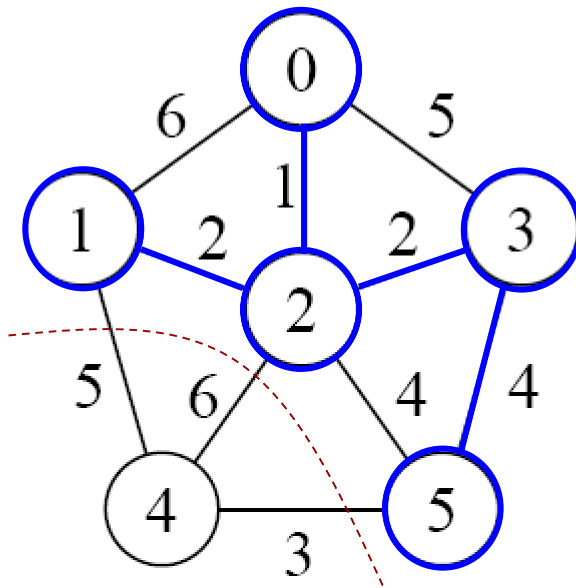
- Exemplo: iniciando o algoritmo pelo vértice 0

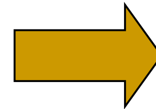


Algoritmo de Prim

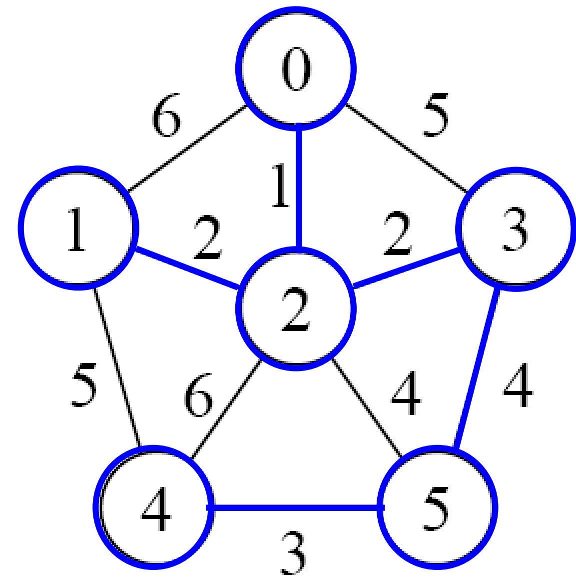


Algoritmo de Prim



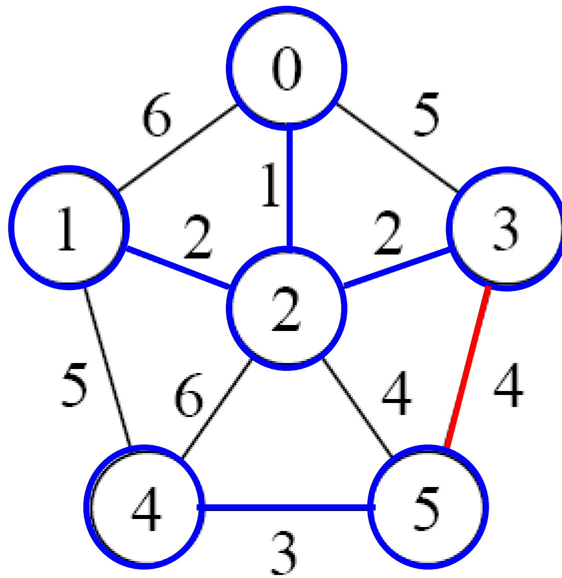


Árvore geradora mínima

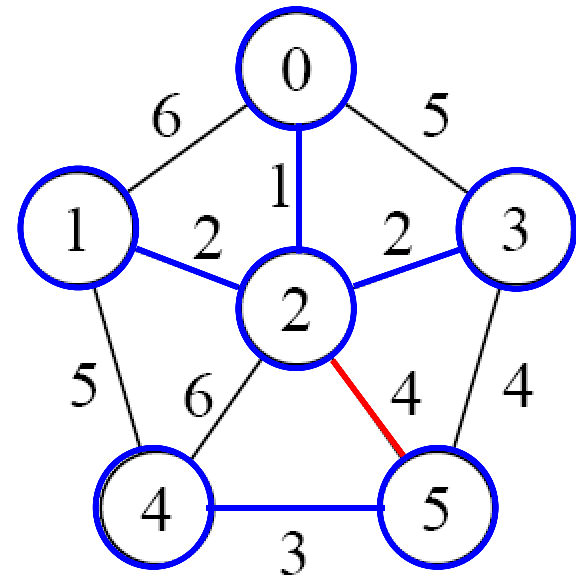


Algoritmo de Prim

- Há mais de uma árvore geradora mínima para um mesmo grafo



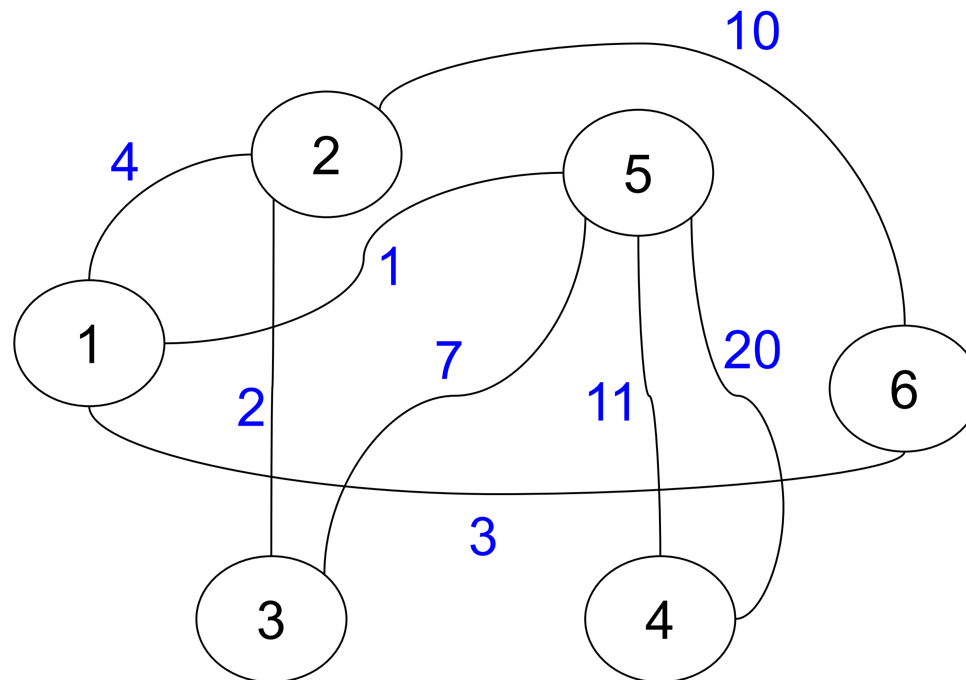
ou



Exercícios

Algoritmo de Prim

- Encontre uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo utilizando o algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

- **Implemente** o algoritmo de Prim!
  - Qual a complexidade de sua implementação?
  - Como melhorar?

- A grande questão é ter uma maneira eficiente de, a cada passo, achar uma aresta segura!
- Os dois algoritmos (Prim e Kruskal) variam na estratégia que adotam para fazer isso!
  - Ambos podem ser vistos como especializações do algoritmo genérico (estratégia ‘greedy’)

Algoritmo de Prim

- Maneira mais eficiente de determinar a aresta segura
  - Mantém todos os vértices que ainda não estão na árvore em uma fila de prioridade
    - Um valor de chave é usado para determinar a prioridade do vértice na fila (`key´): o vértice *v* prioritário é o vértice extremo de alguma aresta segura
    - Para cada vértice *v*, a aresta segura é a aresta de menor peso que conecta *v* a um vértice já na árvore (aresta leve que cruza o corte!)

Algoritmo de Prim

- Maneira mais eficiente de determinar a aresta segura
  - Mantém todos os vértices que ainda não estão na árvore em uma fila de prioridade
    - Qual a maneira mais eficiente de representar uma fila de prioridade?
    - Qual o custo das operações de inserção e remoção nessa representação? O(log(n))

Procedure MST-PRIM(G, *r*)

1. Cria array *parent*[] de tamanho |V|, inicializa com NIL
2. Cria minHeap *H* (ou fila de prioridade) de tamanho |V|
3. Insere todos os vértices em H, tal que H.*key[v]* é 0 para o vértice inicial e H.*key[v]* é INF (infinito) para todos os demais

```
4. While not emptyHeap(H) do
        u := extractMin(H)
        For all v in adj(u) do
            If v in H then          // seja w o peso da aresta (u,v)
                If w < H.key[v] then
                    H.key[v] := w // (u,v) é aresta segura (até o momento)
                End If
                parent[v] := u
            End If
        End For
   End While
```

Procedure MST-PRIM(G, *r*)

1. Cria array *parent*[] de tamanho |V|, inicializa com NIL
2. Cria minHeap *H* (ou fila de prioridade) de tamanho |V|
3. Insere todos os vértices em H, tal que H.*key[r]* := 0 (vértice inicial) e H.*key[v]* := INF (infinito) para todos os demais

```
4. While not emptyHeap(H) do
        u := extractMin(H)                    // operação tem custo O(log(|V|))
        For all v in adj(u) do
            If v in H then              // atualiza key[v] em H: custo O(log(|V|))
                If w < H.key[v] then      // w é o peso da aresta (u,v)
                        H.key[v] := w
                End If
                parent[v] := u
            End If
        End For
    End While
```

Procedure MST-PRIM(G, *r*)

1. Cria array *parent*[] de tamanho |V|, inicializa com NIL
2. Cria minHeap *H* (ou fila de prioridade) de tamanho |V|
3. Insere todos os vértices em H, tal que H.*key[v]* é 0 para o vértice inicial e H.*key[v]* é INF (infinito) para todos os demais

```
4. While not emptyHeap(H) do              // executado |V| vezes
       u := extractMin(H)                 // operação tem custo O(log(|V|))
       For all v in adj(u) do             // executado |A| vezes no total
           If v in H then                 // atualiza key[v] em H: custo O(log(|V|))
               If w < H.key[v] then       // w é o peso da aresta (u,v)
                   H.key[v] := w
               End If
               parent[v] := u
           End If
       End For
   End While
```

Algoritmo de Prim

- Complexidade de tempo:

  $O((|A| + |V|) * \log(|V|))$ ou

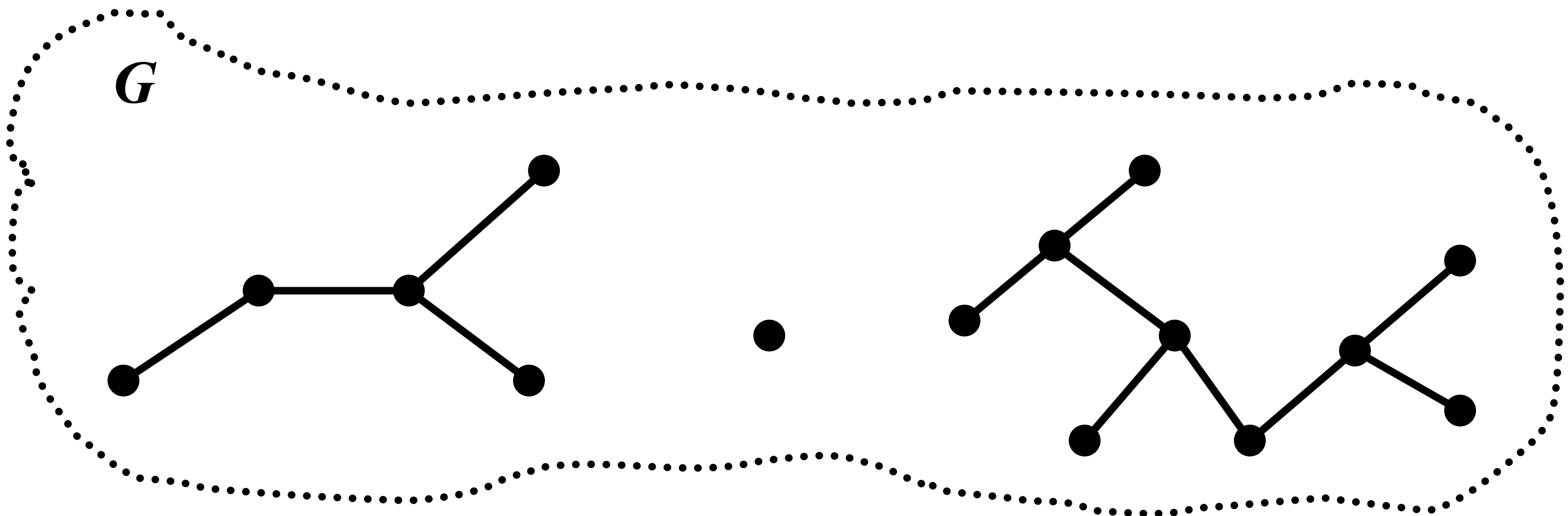
  $O(|A| \log(|V|))$

  - Supondo representação por listas de adjacências e a <u>fila de prioridade</u> implementada como uma *heap* binária

- Os dois algoritmos (Prim e Kruskal) variam na estratégia adotada para identificar uma aresta segura na iteração corrente...

Algoritmo de Kruskal

- Relembrando: uma floresta é um conjunto de árvores



Algoritmo de Kruskal

- Mais eficiente do que Prim em grafos esparsos
- Não precisa manter uma árvore desde o começo
- Não inicia em nenhum vértice em particular
  - Verifica se as arestas podem (ou não) pertencer à árvore, analisando-as em ordem crescente de custo
  - As árvores que compõem a floresta são identificadas pelos conjuntos S_i, que contém os vértices que a compõem

Algoritmo de Kruskal

- Basicamente, o algoritmo constrói uma árvore geradora a partir de uma floresta
  - Estado inicial: corresponde à floresta formada por |V| árvores triviais (i.e., um só vértice cada)

Algoritmo de Kruskal

```
procedimento Kruskal(G)

  definir conjuntos Sj = {vj}, 1 ≤ j ≤ |V|
  inserir as arestas de G em uma fila de prioridade,
em ordem crescente de peso
  enquanto houver arestas na fila faça
      (v,w) = remove aresta da fila
       se v ∈ Sp e w ∈ Sq, Sp∩Sq = ∅ então
         Sp = Sp∪Sq
         eliminar Sq
```

Ponto importante do algoritmo: deve-se evitar ciclos!

Algoritmo de Kruskal

```
procedimento Kruskal(G)

   definir conjuntos Sj = {vj}, 1 ≤ j ≤ |V|
   inserir as arestas de G em uma fila de prioridade,
em ordem crescente de peso
   enquanto houver arestas na fila faça
         (v,w) = remove aresta da fila
          se v ∈ Sp e w ∈ Sq, Sp∩Sq = ∅ então
            Sp = Sp∪Sq
            eliminar Sq
```

Ponto importante do algoritmo: deve-se evitar ciclos! Por que?

Algoritmo de Kruskal

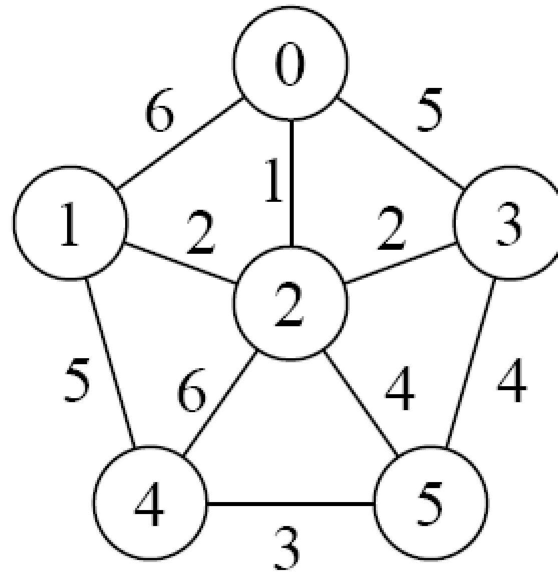
```
procedimento Kruskal(G)

  definir conjuntos Sj = {vj}, 1 ≤ j ≤ |V|
  inserir as arestas de G em uma fila de prioridade,
em ordem crescente de peso
  enquanto houver arestas na fila faça
      (v,w) = remove aresta da fila
       se v ∈ Sp e w ∈ Sq, Sp∩Sq = ∅ então
         Sp = Sp∪Sq
         eliminar Sq
```

Ponto importante do algoritmo: deve-se evitar ciclos! Onde está isso?

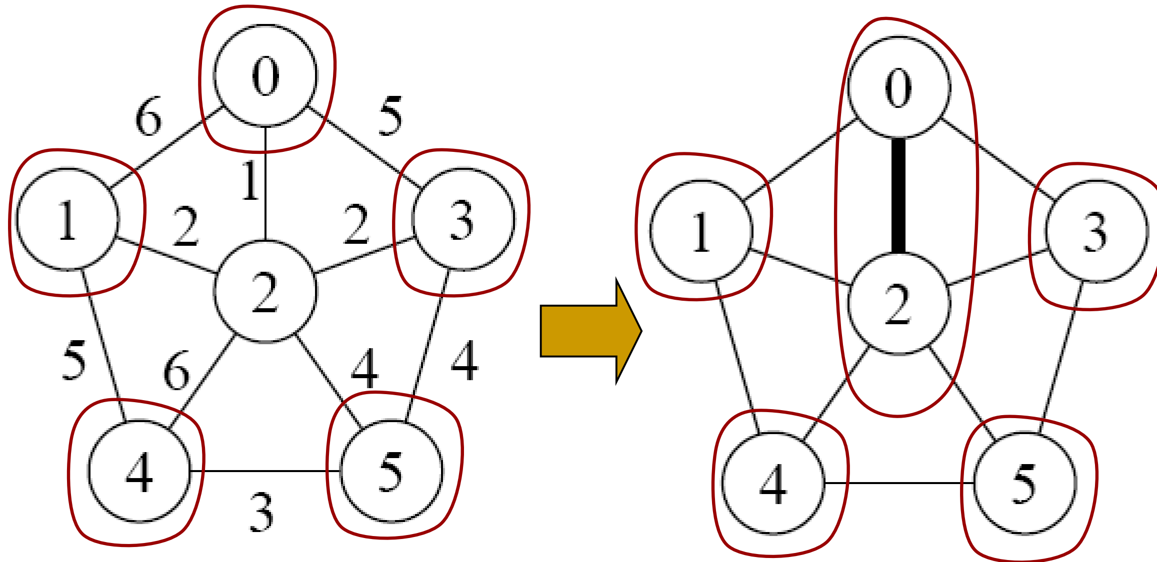
Algoritmo de Kruskal

- Exemplo



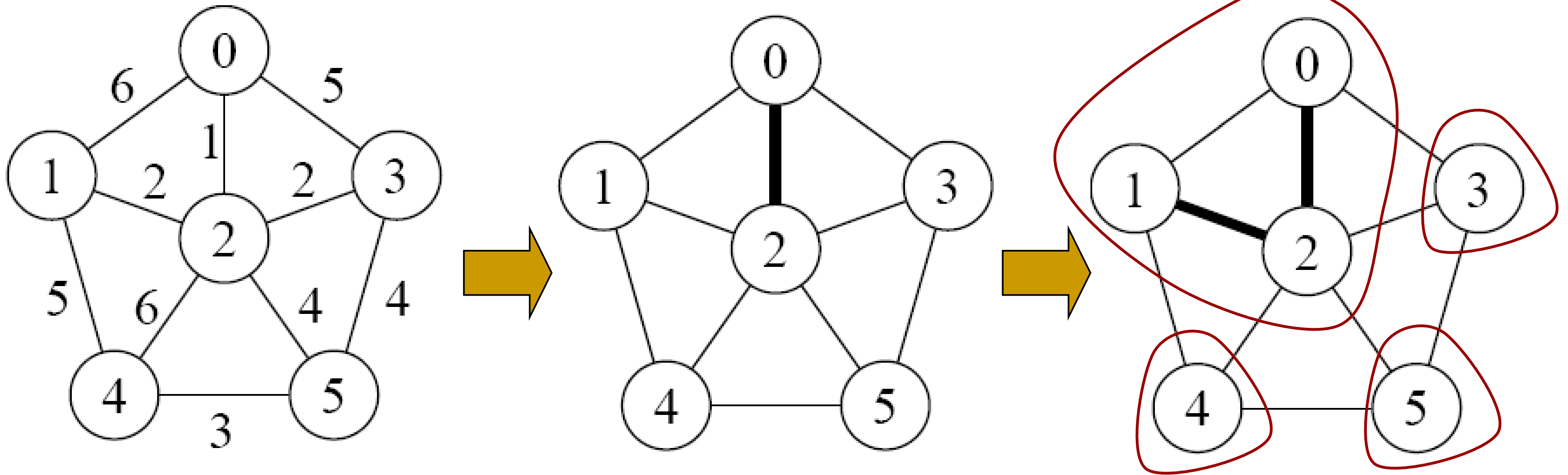
Fila: (0,2,1) (1,2,2) (2,3,2) (4,5,3) (3,5,4) (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)

Algoritmo de Kruskal: exemplo



Fila: ~~(0,2,1)~~ (1,2,2) (2,3,2) (4,5,3) (3,5,4) (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)

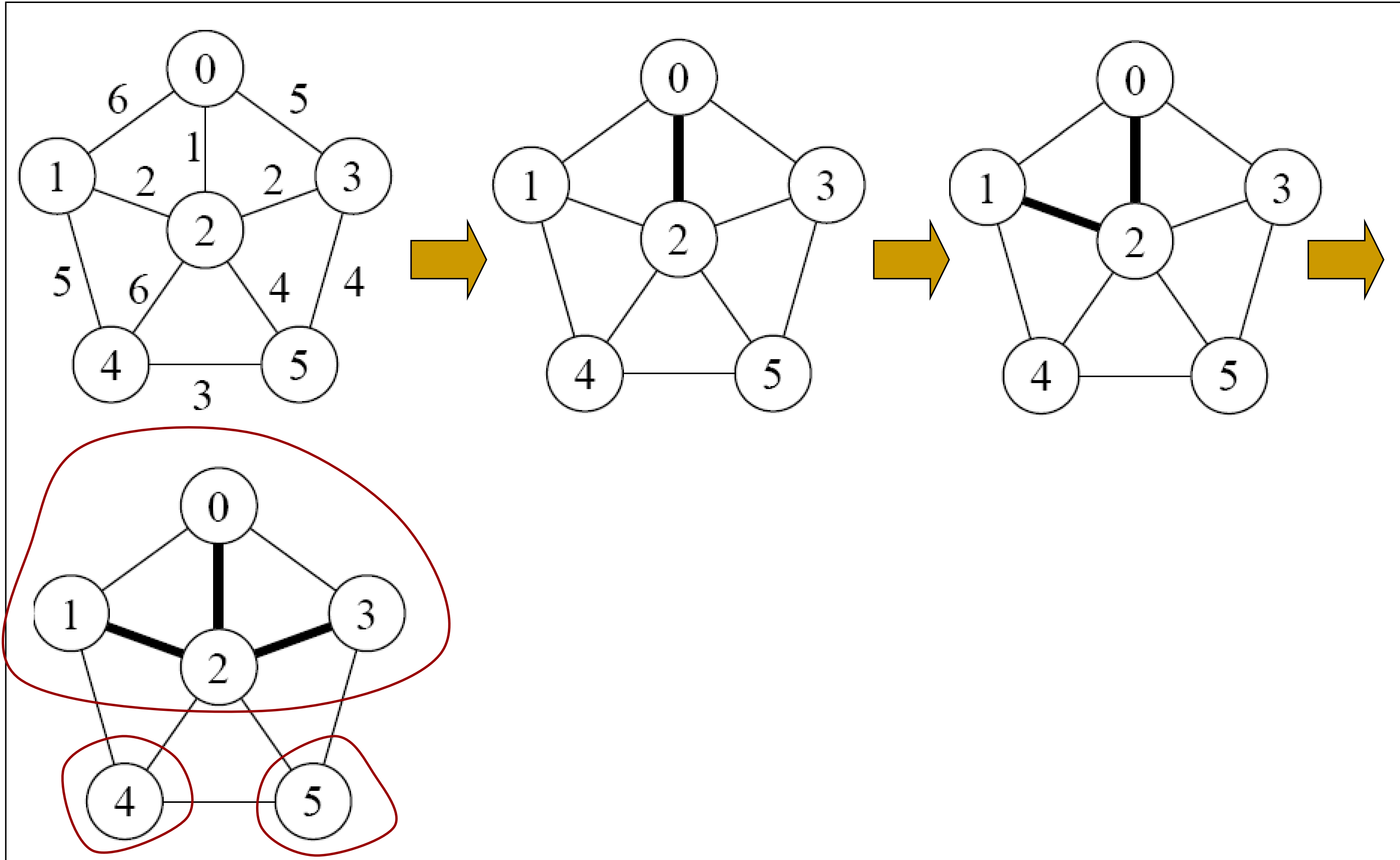
Algoritmo de Kruskal: exemplo



Fila: ~~(0,2,1) (1,2,2)~~ (2,3,2) (4,5,3) (3,5,4) (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)

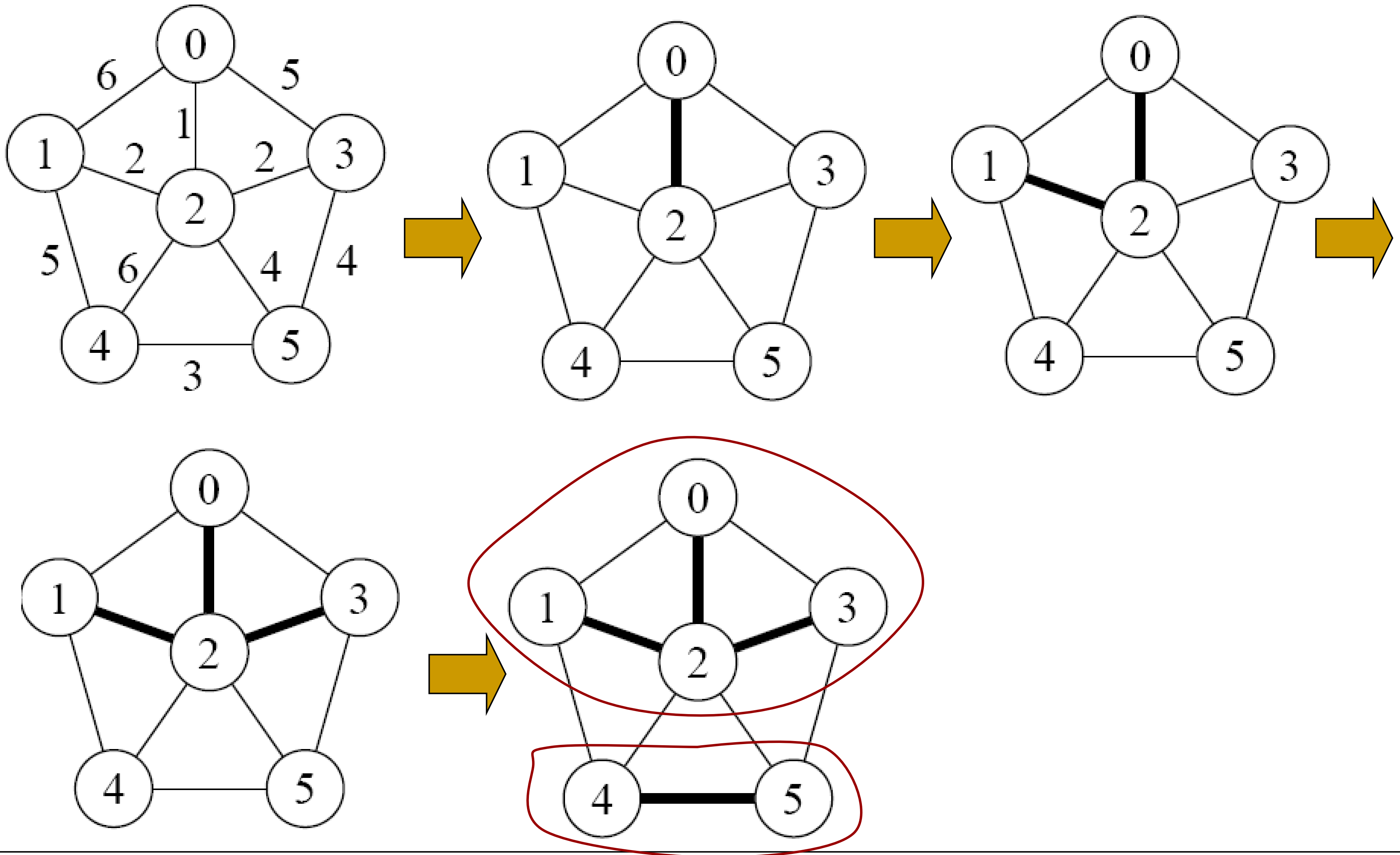
Algoritmo de Kruskal: exemplo

Fila: ~~(0,2,1) (1,2,2) (2,3,2)~~ (4,5,3) (3,5,4) (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)



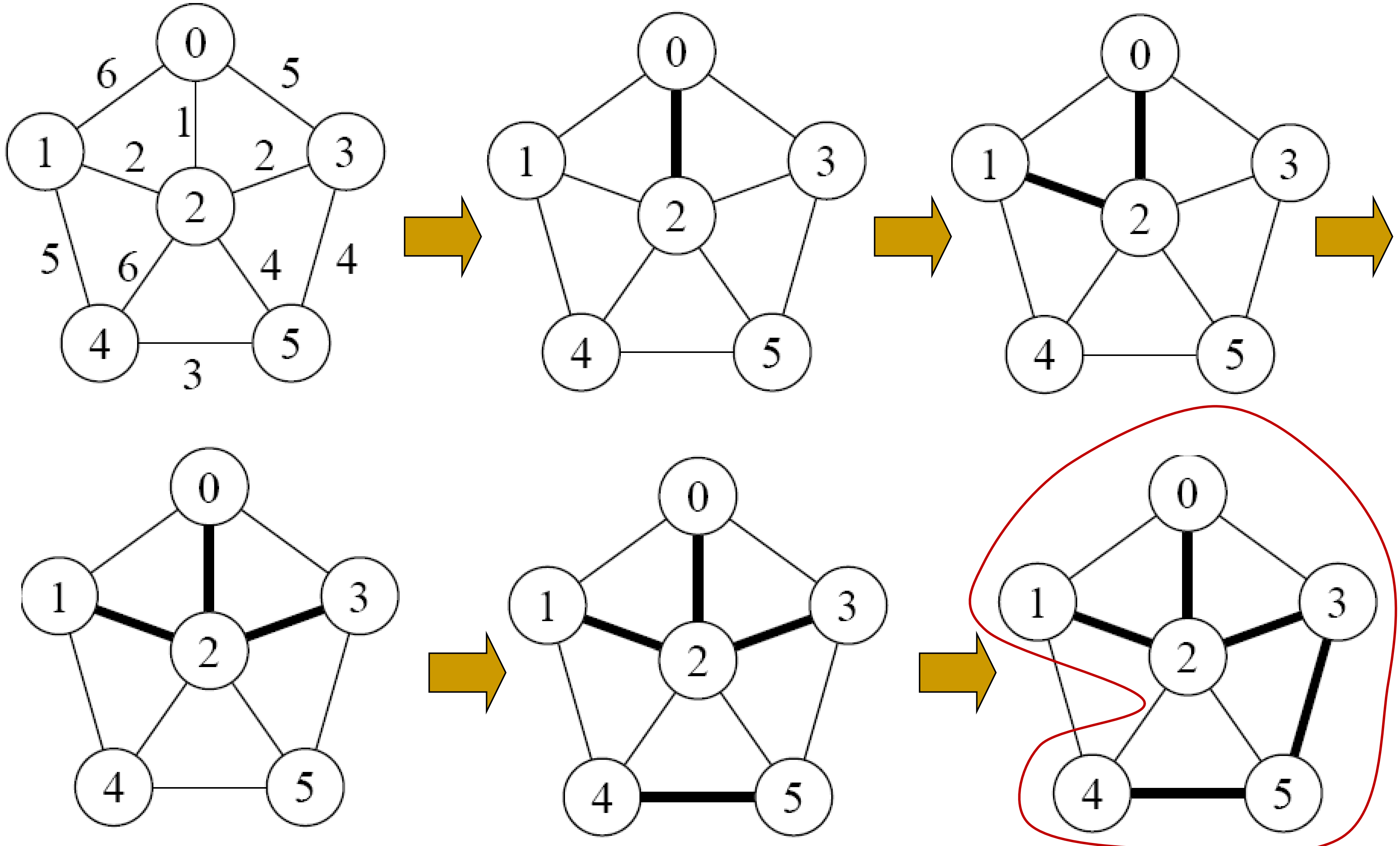
Algoritmo de Kruskal: exemplo

Fila: ~~(0,2,1) (1,2,2) (2,3,2) (4,5,3)~~ (3,5,4) (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)



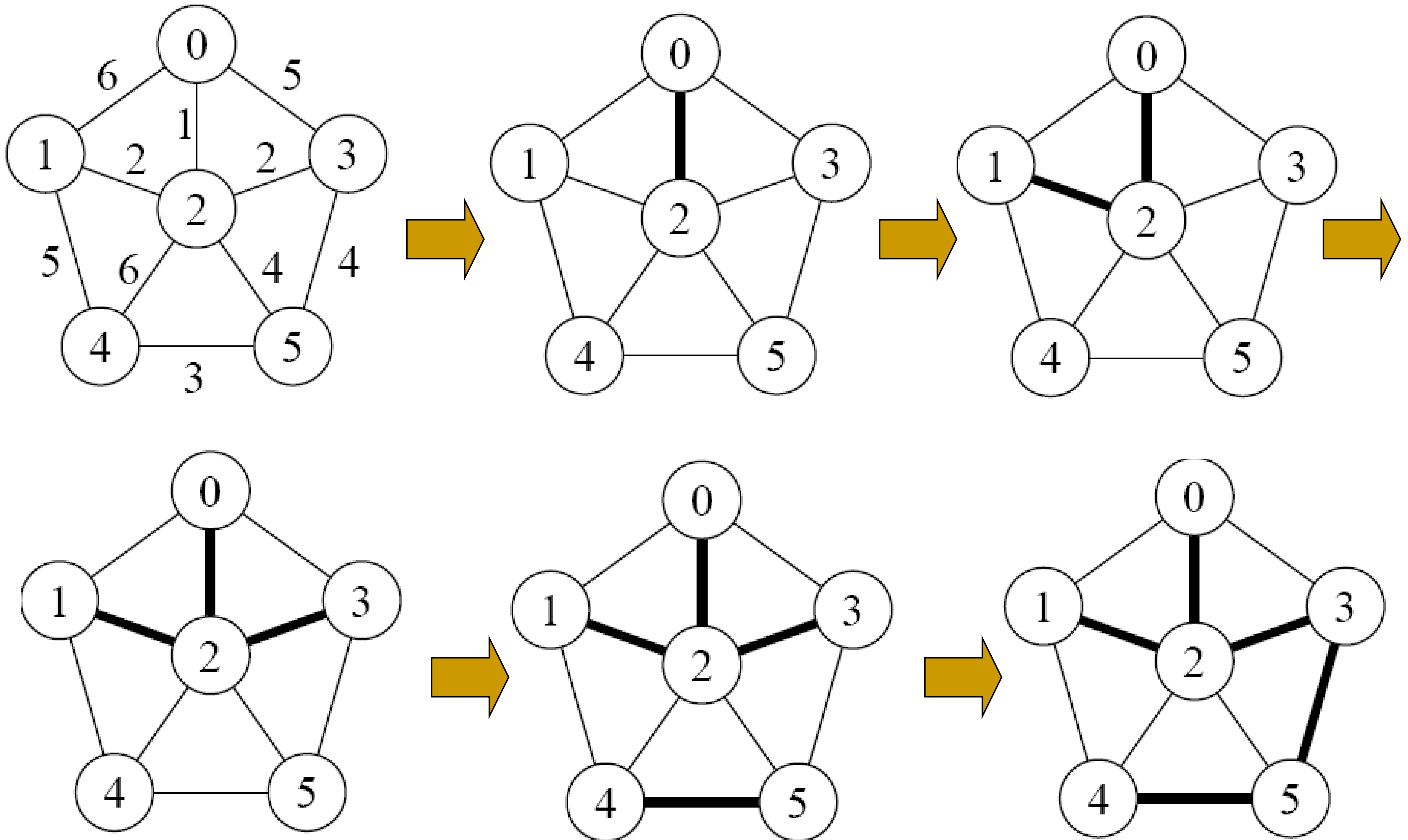
Algoritmo de Kruskal: exemplo

Fila: ~~(0,2,1) (1,2,2) (2,3,2) (4,5,3) (3,5,4)~~ (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)



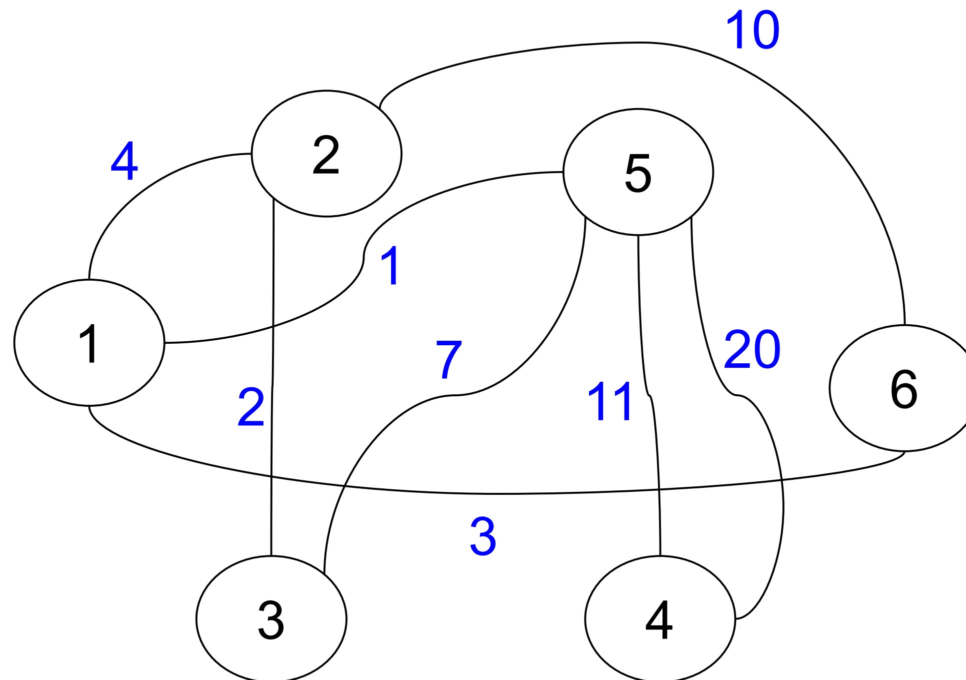
Algoritmo de Kruskal: exemplo

Fila: ~~(0,2,1) (1,2,2) (2,3,2) (4,5,3) (3,5,4)~~ (2,5,4) (1,4,5) (0,3,5) (0,1,6) (2,4,6)



Algoritmo de Kruskal

- Exercício
  - Encontre uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo utilizando o algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal: exemplo

- Exercício
  - Implementação do algoritmo de Kruskal

Procedure MST-Kruskal(G)

1. A := $\emptyset$
2. **For** each vertex v in V **do**
   make-set(v)
   End For
3. Ordenar arestas de A em ordem crescente de peso *w*
4. **For** each (u,v) in A (em ordem crescente de peso) **do**
   If *find-set*(u) $\neq$ *find-set*(v) **then**
   A := A $\cup$ {(u,v)}
   union(u,v)
   End If
   End For

make-set(u): cria conjunto com vértice *u*
find-set(u): retorna um elemento representativo do conjunto que contém *u*
union(u,v): combina as árvores

Algoritmo de Kruskal

- Complexidade: $O(|A| \log(|V|))$
  - Se bem implementado (depende da estrutura de dados adotada para representar os conjuntos!)
    - discussão no livro do Cormen, cap. 23