**SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas**

# Resolução Quiz #3

## 1 Questão 1

**Transformadores de $\lambda/4$ são extremamente úteis quando o casamento envolve impedâncias de carga puramente reais. Quando a impedância de carga é complexa, é preciso conectar uma linha de transmissão adicional entre a carga e a linha principal, e o comprimento da linha adicional deve garantir que sua impedância de entrada (da linha adicional) seja vista como puramente real. Só assim o transformador de $\lambda/4$ poderá ser usado. Portanto, considere a linha de transmissão onde $Z_L = 100 - j50\ \Omega$, $Z_0 = 50\ \Omega$ (principal e adicional), $f = 50$ MHz.**

**Calcule:**

(a) **O comprimento da linha adicional (entre carga e linha principal) que apresenta impedância de entrada puramente real.**

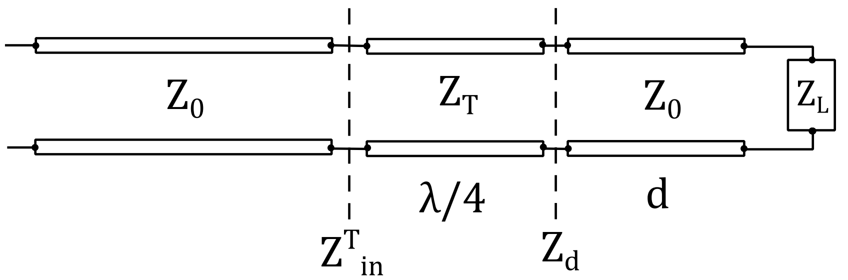


Figura 1: Esquemático do casamento de impedâncias por transformador de quarto de onda

Como apresentado pelo enunciado, no casamento de impedâncias por transformador de $\lambda/4$ com carga de valor complexo, faz-se necessário introduzir uma linha adicional de comprimento $d$, como esquematizado na Fig. 1, de forma que a impedância de entrada da linha, $Z_d$, assuma um valor real.

Assim, seja a impedância característica da linha adicional equivalente a $Z_0 = 50\ \Omega$, normaliza-se a carga:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 2 - j1$$

Com auxílio de uma carta de Smith (cf. Fig. 2), marca-se o ponto correspondente a impedância normalizada $z_L$. Em seguida, "caminha-se" pela linha adicional, percorrendo-se o lugar geométrico de $|\Gamma_L|$ constante (círculo azul), na direção do gerador (sentido horário) até chegar no eixo horizontal, onde a parte imaginária da impedância será nula.

Observa-se, assim, que ao "caminhar" uma distância $\boxed{d = 0.214\lambda}$ na linha, obtêm-se uma impedância $z_d = 0.38$ puramente real. Supondo uma velocidade de fase $v = 3 \times 10^8$ m/s, seja $f = 50$ MHz, tem-se:

$$d = 0.214\lambda = 0.214\,\frac{v_p}{f} \Rightarrow \boxed{\text{d} = 1.284 \text{ m}}$$

(b) **Projete o transformador de $\boldsymbol{\lambda/4}$.**

Quanto ao projeto do transformador de quarto de onda, entende-se como o cálculo da impedância característica $Z_T$ do mesmo. Para tanto, utiliza-se a equação da impedância $Z(z)$ de uma linha sem perdas de comprimento $\lambda/4$. Nesse caso:

$$k_i\, l\Big|_{l=\lambda/4} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Então

$$Z(z=-l) \equiv Z_{in}^T = Z_T\,\frac{Z_d + jZ_T\,tg(k_i\,l)}{Z_T + jZ_d\,tg(k_i\,l)} = \frac{Z_T^2}{Z_d}$$

Logo, tem-se

$$Z_T = \sqrt{Z_{in}^T \cdot Z_d}$$

No item anterior, encontrou-se que $z_d = 0.38$, normalizado com relação à $Z_0$, o que corresponde a $Z_d = 19\ \Omega$.

Dessa maneira, como deseja-se que a impedância vista pela linha principal na entrada do transformador seja equivalente a sua impedância característica $Z_0 = 50\ \Omega$, faz-se:

$$Z_T = \sqrt{50 \cdot 19} \Rightarrow \boxed{Z_T = 30.82\ \ \Omega}$$

Portanto, para o âmbito do problema, deve-se projetar um transformador de comprimento 1.5 m e impedância característica correspondente a 30.82 Ω.

(c) **Calcule o VSWR em cada segmento de linha (principal, $\boldsymbol{\lambda/4}$, adicional)**

Sabe-se que a ROE (VSWR) é determinada por:

$$ROE = \frac{1+|\Gamma_0|}{1-|\Gamma_0|}$$

com

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

em uma linha da transmissão sem perdas de impedâncias característica $Z_0$ enxergando uma carga $Z_L$.

Dessa forma, na linha adicional, tem-se $Z_L = 100 - j50\ \Omega$ e $Z_0 = 50\ \Omega$, o que confere:

$$\Gamma_0^{ad} = 0.4 - j0.2\ \Omega \Rightarrow |\Gamma_0^{ad}| = 0.45$$

Assim, encontra-se $\boxed{ROE^{\,ad} = 2.61}$.

No caso do transformador, tem-se $Z_L \equiv Z_d = 19\ \Omega$ e $Z_0 \equiv Z_T = 30.82\ \Omega$. Logo, obtém-se:

$$\Gamma_0^{T} = -0.24\ \Omega \Rightarrow |\Gamma_0^{ad}| = 0.24$$

Dessa forma, encontra-se $\boxed{ROE^{\,T} = 1.62}$. Os dois resultados, obtidos por meio do cálculo numérico, podem ser igualmente deduzidos graficamente pela carta de Smith (cf. Fig. 2). Percebe-se que a ROE da linha adicional (círculo azul) é equivalente a 2.61. Já a ROE do transformador (círculo verde) é igualmente 1.62. (OBS.: O círculo verde é obtido tomando o lugar geométrico do transformador, que enxerga a carga $Z_d$ no seu terminal. Ao percorrer-se um quarto de onda na direção do gerador (meia volta na carta), chega-se na impedância de entrada do transformador $Z_{in}^{T}$ que equivale a $1.62 \times 30.82 = 50\ \Omega$, como, de fato, desejado.)

Por fim, na condição de casamento de impedândia, a ROE da linha principal será $\boxed{ROE^{\,p} = 1}$, pois $|\Gamma_0^{p}| = 0$.

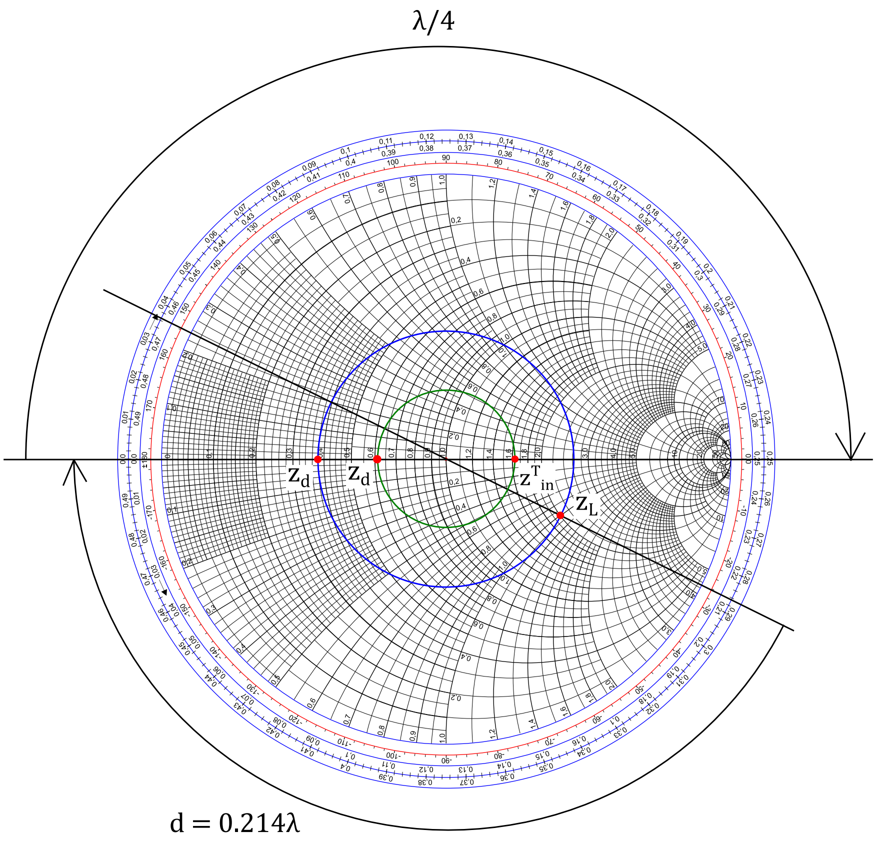


Figura 2: Carta de Smith com solução gráfica

# 2 Questão 2

**Considere um gerador com $f = 150$ MHz conectado a uma linha de transmissão de 10 m de comprimento com impedância característica $Z_0 = 75\ \Omega$. Esta linha é conectada a uma carga composta de uma conexão em paralelo de duas linhas de $Z_0 = 50\ \Omega$ e comprimento de 0,5 m e 1 m, cada uma terminada com uma impedância de carga de $Z_L = 50\ \Omega$. Assim, pede-se:**

**O comprimento $d_s$ do *stub* paralelo curto-circuitado e a posição $l_s$ onde ele deve ser conectado sabendo que a impedância característica do *stub* é $Z_s = 75\ \Omega$.**

**Nota: a posição do *stub* deve ser a mais próxima da carga possível. Todas as linhas são sem perdas com permissividade relativa $\epsilon_r = 2{,}2$.**

De antemão, seja o comprimento de onda dado por:

$$\lambda = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r}}$$

tem-se, então, para $f = 150$ MHz e $\epsilon_r = 2.2$, $\boxed{\lambda = 1.35 \text{ m}}$.

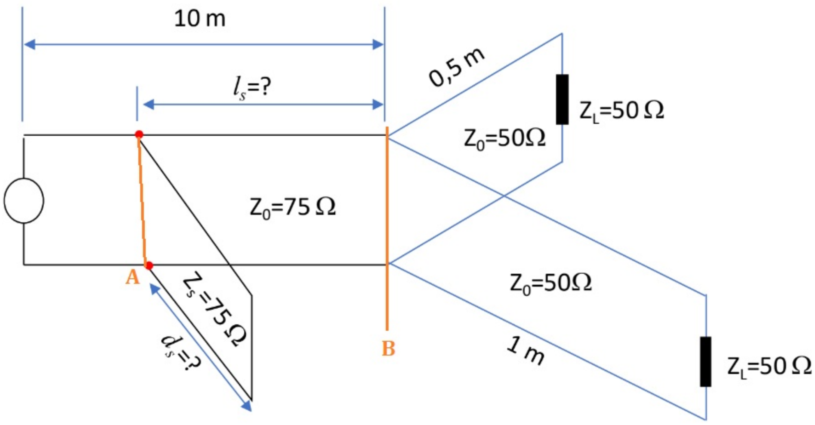


Figura 3: Esquemático da conexão entre as linha de transmissão e o *stub* (toco).

Inicialmente, como forma de simplificar o problema, realiza-se o paralelo das duas linhas conectadas no plano B (cf. Fig. 3), de forma a obter uma única carga vista pelo terminal da linha principal. Como ambas as linhas estão sob a condição de casamento de impedâncias ($Z_L = Z_0$), sabe-se que a impedância $Z(z)$ por todo comprimento de ambas será sempre equivalente a $Z_0 = 50\ \Omega$, segundo a equação abaixo:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0\, tg(k_i\, z)}{Z_0 - jZ_L\, tg(k_i\, z)} \tag{1}$$

Assim, tem-se que o equivalente paralelo no plano B será:

$$Z_B = \frac{Z_0}{2} \Rightarrow \boxed{Z_B = 25\ \ \Omega}$$

Por sua vez, no plano A, haverá igualmente duas impedâncias em paralelo: (i) aquela vista na entrada do *stub* e (ii) aquela vista na entrada do trecho série de linha de comprimento $l_s$. Portanto, espera-se que vá-se associar duas impedâncias em paralelo, o que é facilitado ao trabalhar-se com as impedâncias em admitância na carta de Smith.

Portanto, seja na linha principal $Z_0 = 75\ \Omega$, a impedância normalizada da carga vista no terminal será $\boxed{z_B = 0.33}$.

Assim, marcam-se os pontos correspondentes na carta de Smith (cf. Fig. 4) para a impedância e a admitância.

A aplicação do *stub* (toco) objetiva conduzir a linha de transmissão ao casamento de impedâncias, ou, em outras palavras, estabelecer $z = 1$ ($y = 1$) em todo o comprimento da linha. Dessa forma, ao percorrer o comprimento $l_s$ na linha, "caminhando" no lugar geométrico de $|\Gamma_B|$ constante (círculo azul), espera-se encontrar, ao menos, um valor de impedância/admitância cuja parte real seja unitária.

Na carta de Smith (cf. Fig. 4), ilustra-se igualmente o círculo vermelho de $r = 1$ (parte real da impedância/admitância normalizada almejada). Nesse panorama, percorre-se o lugar geométrico de $|\Gamma_B|$ constante (círculo azul), partindo de $y_B$, até a interseção deste com o círculo vermelho de $r = 1$ no ponto $y_A = 1 - j1.15$, que configura a admitância (ii) na entrada do trecho série de linha de comprimento $l_s$. Assim, é possível dizer que até o plano A, percorre-se um comprimento aproximado de $l_s = 0.084\lambda$, que corresponde a:

$$\boxed{l_s = 113.27 \text{ cm}}$$

A partir desse momento, objetiva-se anular a parte imaginária de $y_A$ para que chegue-se ao centro da carta ($z = 1$ ou $y = 1$). Nesse sentido, ainda pela Eq. 1, é possível observar que linhas de transmissão, como o *stub*, terminadas em curto circuito ($Z_L = 0$), apresentam uma impedância normalizada equivalente:

$$\frac{Z(z)}{Z_0} = -j\, tg(k_i\, z) = -jX$$

ou seja, puramente imaginária. Portanto, percebe-se que, de fato, o *stub* permite realizar a operação desejada. Assim, a admitância (i) vista na entrada do *stub* deve equivaler a +j1.15 para que seja possível anular a parte imaginária pela associação em paralelo.

Percorre-se, dessa maneira, agora o lugar geométrico correspondente a linha de transmissão do *stub*: marca-se o ponto de admitância $y_{stub} = +\text{j}1.15$ na carta e caminha-se de $y \to \infty$ até este ponto. Tem-se, logo, o comprimento do *stub* de $d_s = 0.386\lambda$, o que equivale a:

$$\boxed{d_s = 520.48 \text{ cm}}$$

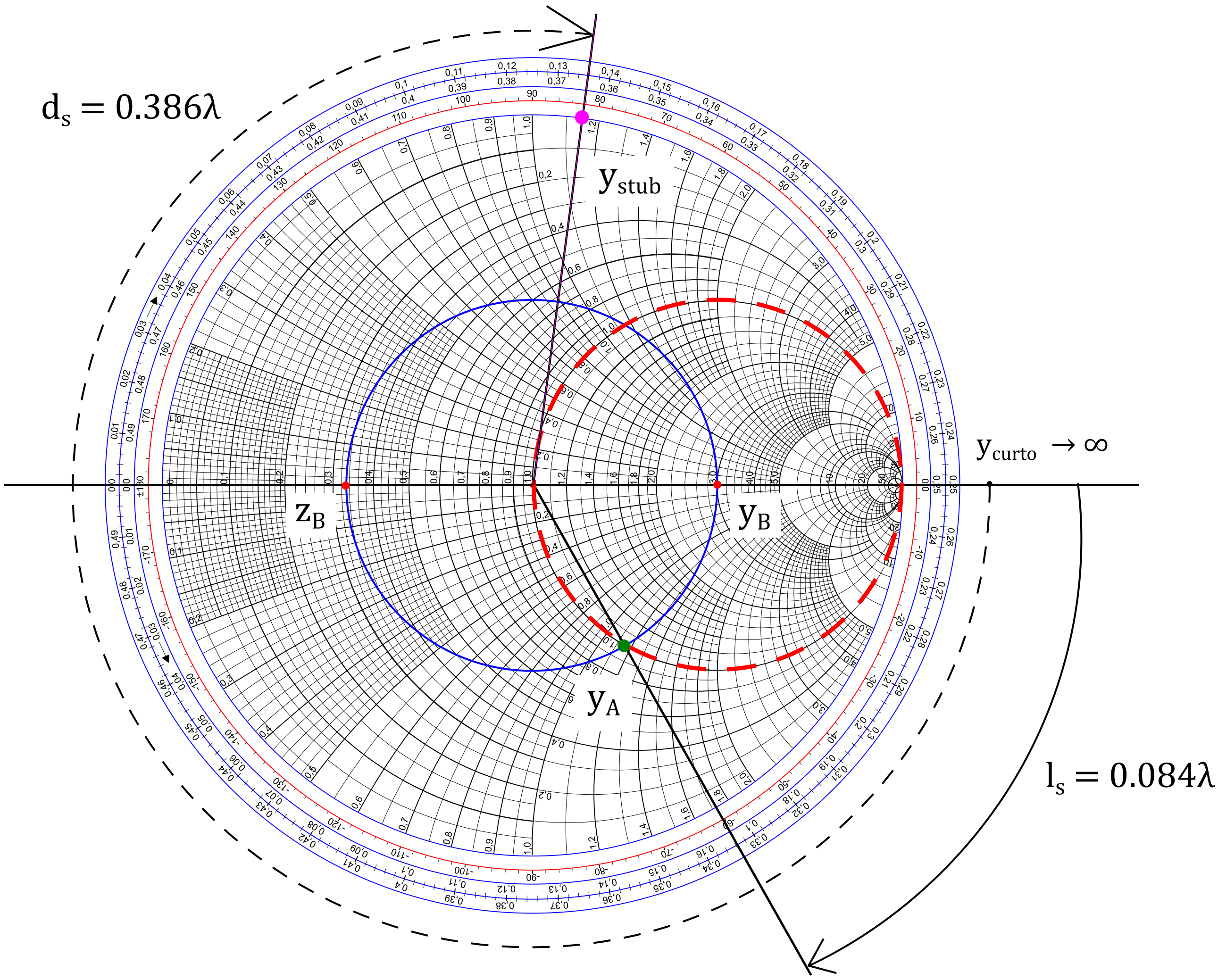


Figura 4: Carta de Smith com solução gráfica