Prova 1 - SMA0169 - EDP - 22.5.2023

Prof. Sergio H. Monari Soares

Questão	Valor	Nota
1.ª	3,0	
2.ª	3,0	
3.ª	3,0	
4.ª	1,0	
Total	10,0	

Nome:____

Número USP:______________________________________

Instruções

1. Você só poderá sair da sala de aula após entregar a sua prova.

2. O uso de quaisquer equipamentos eletrônicos é proibido. Em particular, desligue e guarde o seu telefone celular. Portar em mãos ou utilizar quaisquer equipamentos eletrônicos durante a prova **resultará em anulação da sua avaliação.**

3. Esta prova é **individual.** Tentativas de consultar colegas, fornecer informações a colegas, consultar material bibliográfico, anotações pessoais etc. **resultará em anulação da sua avaliação.**

Termo Compromisso

Eu, abaixo assinado, empenho a minha honra em realizar esta avaliação de acordo com as instruções recebidas, de modo estritamente individual, sem consultar ou fornecer informações aos meus colegas, respeitando assim o propósito da avaliação, os meus colegas e professores bem como o Código de Ética da Universidade de São Paulo.

Assinatura: ____

1. (a) Mostre que a solução geral da equação da onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ $(x \in \mathbb{R},\ t > 0)$, é

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

para f e g funções arbitrárias.

Solução. Considere a mudança de variáveis

$$\xi = x + ct \qquad \eta = x - ct.$$

Pela regra da cadeia,

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \quad \text{e} \quad \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta.$$

Assim,

$$\partial_{xx} = \partial_{\xi\xi} + 2\partial_{\xi\eta} + \partial_{\eta\eta} \quad \text{e} \quad \partial_{tt} = c^2\partial_{\xi\xi} - 2c^2\partial_{\xi\eta} + c^2\partial_{\eta\eta}.$$

Portanto

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u = -4c^2\partial_{\xi\eta}u = 0;$$

O que significa que $u_{\xi\eta} = 0$, pois $c \neq 0$. Integrando em η, temos $u_\xi(\xi,\eta) = F(\xi)$. Integrando em relação a ξ, temos

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

onde $f' = F$, ou seja,

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$

(b) Use o item anterior para obter a fórmula de d'Alembert da solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Solução. Fazendo $t = 0$ na identidade

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{1}$$

obtemos

$$\phi(x) = f(x) + g(x). \tag{2}$$

Derivando (1) e fazendo $t = 0$,

$$\psi(x) = cf'(x) - cg'(x). \tag{3}$$

Derivando (2) e dividindo (3) por c, obtemos

$$\phi'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{e} \quad \frac{1}{c}\psi(x) = f'(x) - g'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\phi'(x) + \frac{\psi(x)}{c}\right) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{2}\left(\phi'(x) - \frac{\psi(x)}{c}\right)$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + A \\ g(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + B \end{aligned}$$

onde A, B são constantes arbitrárias. Por (2), $A + B = 0$. Avaliando f em $x + ct$ e g em $x - ct$, obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s) + \frac{1}{2}\phi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(s)\,ds,$$

ou seja,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

(c) Use a integral de energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho u_t^2 + T u_x^2\right)\,dx,$$

onde ρ e T são constantes e $c^2 = T/\rho$, para mostrar a unicidade de solução do problema de valores iniciais do item (b).

Solução. Sejam u_1 e u_2 soluções do problema de valores iniciais do item (b). Assim $w = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Como os dados iniciais neste problema são nulos, a energia $E(0) = 0$. Pela conservação de energia, $E(t)$ é uma constante independente de t, logo $E(t) = E(0) = 0$, logo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho w_t^2 + T w_x^2\right)\,dx) = 0.$$

Como o integrando é contínuo e não negativo,

$$\rho w_t^2 + T w_x^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

Assim, w é constante. Mas $w(x,0) = 0$, portanto $w \equiv 0$, isto é, $u_1 \equiv u_2$.

(d) Mostre a estabilidade, isto é, sejam u_1 e u_2 as respectivas soluções dos problemas do item (b) com respectivas condições iniciais ϕ_1, ψ_1 e ϕ_2, ψ_2, mostre que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|,$$

para todo $t \in [0, T]$

Solução. Como a equação é linear, a função $u_1 - u_2$ é solução do problema é solução do problema

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ w(x,0) = \phi_1(x) - \phi_2(x),\ w_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Pela fórmula de d'Alembert,

$$\begin{aligned} u_1(x,t) - u_2(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(\phi_1(x+ct) - \phi_2(x+ct)) + (\phi_1(x-ct) - \phi_2(x-ct))\right] \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (\psi_1(s) - \psi_2(s))\, ds \\ &= \frac{1}{2}\left[(\phi_1 - \phi_2)(x+ct) + (\phi_1 - \phi_2)(x-ct)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (\psi_1 - \psi_2)(s)\, ds \end{aligned}$$

Pela desigualdades triangular,

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq{}& \frac{1}{2}\left[|(\phi_1 - \phi_2)(x+ct)| + |(\phi_1 - \phi_2)(x-ct)|\right] \\ &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1 - \psi_2|(s)\, ds. \end{aligned}$$

Dado $T > 0$, para todo $t \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{2} 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \frac{1}{2c} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \int_{x-ct}^{x+ct} ds \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \frac{1}{2c} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| (x + ct - (x - ct)) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \frac{1}{2c} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| 2ct \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| t \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| T. \end{aligned}$$

2. (a) Enuncie o princípio do máximo para a equação da difusão $u_t - ku_{xx} = 0$.

Solução. Se $u \in C^2((0,L)\times(0,T)) \cap C([0,L]\times[0,T])$ satisfaz a equação de difusão

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L,\ 0 < t < T,$$

então o valor máximo de $u(x,t)$ é assumido inicialmente ($t = 0$) ou nas laterais ($x = 0$ ou $x = L$). O valor mínimo tem a mesma propriedade.

(b) Prove a unicidade de solução do problema de valores inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \quad (0 < x < L,\ t > 0), \\ u(0,t) = g(t),\ u(L,t) = h(t) \quad (0 \leq x \leq L,\ t \geq 0), \\ u(x,0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq L). \end{cases}$$

Solução. Suponha que u_1 e u_2 são soluções do problema de valores inicial e de fronteira em questão. Então $v = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 \quad (0 < x < L,\ t > 0), \\ v(0,t) = 0,\ v(L,t) = 0 \quad (0 \leq x \leq L,\ t \geq 0), \\ v(x,0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L). \end{cases}$$

Assim v é nula inicialmente ($t = 0$) e nas laterais ($x = 0$ ou $x = L$). Seja $T > 0$. Pelo princípio do máximo, $v(x,t) \leq 0$ no retângulo $[0,L]\times[0,T]$. O mesmo para o mínimo mostra que $v(x,t) \geq 0$ no retângulo $[0,L]\times[0,T]$. Portanto, $v \equiv 0$ no retângulo $[0,L]\times[0,T]$. Como $T > 0$ é arbitrário, $v \equiv 0$ no conjunto $[0,L]\times[0,\infty)$, isto é, $u_1 \equiv u_2$.

(c) Mostre a estabilidade, isto é, sejam u_1 e u_2 as respectivas soluções dos problemas do item (b) com respectivas condições iniciais $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ contínuas em $[0,L]$, mostre que

$$\max_{0\leq x\leq L} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{0\leq x\leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|,$$

para todo $t \geq 0$.

Solução. A função $u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 \quad (0 < x < L,\ t > 0), \\ v(0,t) = 0,\ v(L,t) = 0 \quad (0 \leq x \leq L,\ t \geq 0), \\ v(x,0) = \phi_1(x) - \phi_2(x) \quad (0 \leq x \leq L). \end{cases}$$

Como $u_1 - u_2$ é zero nas laterais do retângulo $\{(x,t) \mid 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ e é igual a $\phi_1 - \phi_2$ na base do retângulo, o princípio do máximo diz que

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq \max_{0\leq x\leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|,$$

enquanto o princípio do mínimo diz que

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) \geq \min_{0\leq x\leq L} (\phi_1(x) - \phi_2(x)) \geq -\max_{0\leq x\leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$$

portanto,

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{0\leq x\leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$$

e assim

$$\max_{0\leq x\leq L} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{0\leq x\leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|,$$

para todo $t \geq 0$.

3. Considere a difusão dentro de um tubo circular fechado de comprimento $2L$. Seja x o parâmetro de comprimento do arco onde $-L \leq x \leq L$. Então a concentração da substância difusora satisfaz

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} \qquad (-L < x < L), \\ u(-L,t) = u(L,t) \;\text{ e }\; u_x(-L,t) = u_x(L,t) \qquad (t \geq 0). \end{cases}$$

Estas condições de fronteira são chamadas de condições de fronteira periódicas.

(a) Mostre que os autovalores são $\lambda = (n\pi/L)^2$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Mostre que a concentração é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

(c) Encontre a solução deste problema que satisfaz a condição inicial $u(x,0) = 1 + 3\sin(\pi x/L)$ para $-L \leq x \leq L$.

Solução.

Para resolver este problema separamos as variáveis da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação da difusão obtemos

$$-\frac{T'}{kT} = -\frac{X''}{X} = \lambda \text{ (constante)}.$$

Portanto, $T(t)$ satisfaz a equação $T'(t) = -\lambda kT(t)$, cuja solução é $T(t) = Ae^{-\lambda kt}$. Além disso,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-L) = X(L), \quad X'(-L) = X'(L)$$

Há três possibildades:

a) Se $\lambda = 0$, $X(x) = A + Bx$ e as condições de contorno implicam $B = 0$ e A qualquer.

b) Se $\lambda = \lambda < 0$, $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$ e as condições de contorno implicam $A = B = 0$.

c) Se $\lambda = \beta^2 > 0$, $X(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$. Ao impor as condições de contorno, encontramos A e B quaisquer e $\sin\beta L = 0$, ou seja, $\beta = n\pi/L$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Assim,

$$\lambda = (n\pi/L)^2, \quad X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Para cada n, a geral da edo na variável t é $T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}$. Portanto, a solução (concentração) é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}.$$

Por fim, impondo a condição inicial

$$1 + 3\sin\frac{\pi x}{L} = u(x,0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

obtemos

$$a_0 = 2,\ a_n = 0 (n \geq 1),\ b_1 = 3,\ b_n = 0\ (n \geq 2),$$

ou seja, a solução é

$$u(x,t) = 1 + 3\sin\frac{\pi x}{L} e^{-\pi^2 kt/L^2}.$$

4. Mostre que se f é uma função C^1 em $[-\pi, \pi]$ que satisfaz as condições de fronteira periódicas (veja Questão 3) e se $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

(Dica: Use a identidade de Parseval, lembrando que para a série de Fourier completa, a identidade de Parserval se escreveve como

$$\frac{1}{2}A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx,$$

onde A_0, A_n, B_n $(n = 1, 2, \dots)$ são os coeficientes de Fourier de f.)

Solução. Denotando A_0, A_n, B_n $(n = 1, 2, \dots)$ os coeficientes de Fourier de f, a identidade de Parseval implica

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2}A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2), \tag{4}$$

pois, por hipótese, $A_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Por outro lado, pela integração por partes,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n} dx\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}B_n', \end{aligned}$$

onde B'_n é o coeficiente de Fourier de senos de f'. De modo análogo, usando que $f(-\pi) = f(\pi)$ e que a função cosseno é par, obtemos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-f(x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left[-f(\pi)\cos n\pi + f(-\pi)\cos(-n\pi)\right] - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{n}A'_n, \end{aligned}$$

onde A'_n é o coeficiente de Fourier de cossenos de f'. Substituindo $A_n = -\frac{1}{n}B'_n$ e $B_n = \frac{1}{n}A'_n$ na equação (4) e usando a identidade de Parseval da f', temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(A'_n)^2 + (B'_n)^2] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}[(A'_n)^2 + (B'_n)^2] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$