SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas

Resolução P1 - 09/05/2023

1 Questão 1

(a) Conforme a situação proposta pelo enunciado, observa-se que o campo elétrico da onda plana é perpendicular (direção y) ao plano de incidência $x - z$, enquanto o campo magnético deve pertencer ao plano de incidência. Logo, tem-se um caso de **polarização TE** (Elétrico Transversal).

(b) De acordo com a equação da componente y do campo elétrico incidente, o vetor de onda é descrito por:

$$\vec{k} = k_{ix}\,\hat{x} + k_{iz}\,\hat{z} = 3\hat{x} + 4\hat{z}$$

Logo, o ângulo de incidência θ_i deve ser dado por:

$$\theta_i = tg^{-1}\left(\frac{k_{ix}}{k_{iz}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

Portanto, $\boxed{\theta_i = 36.87°}$

(c) Inicialmente, determina-se o ângulo de transmissão θ_t utilizando a lei de Snell:

$$\begin{gathered} k_1 \cdot sen(\theta_i) = k_2 \cdot sen(\theta_t) \\ \omega\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0} \cdot sen(\theta_i) = \omega\sqrt{\mu_0\,\mu_R\,\epsilon_0\,\epsilon_R} \cdot sen(\theta_t) \\ sen(\theta_i) = \sqrt{\mu_R\,\epsilon_R} \cdot sen(\theta_t) \end{gathered}$$

Considerando que o meio dielétrico é não-magnético, $\mu_R = 1$, então o ângulo de transmissão é descrito por:

$$\theta_t = sen^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_R}}\,sen(\theta_i)\right]$$

Logo, $\theta_t = 17.46°$. Dessa forma, pode-se calcular os coeficientes de reflexão e transmissão para polarização TE, sabendo que as impedâncias características do meio são $\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\ \Omega$ e $\eta_2 = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{\epsilon_R}} = 60\pi\ \Omega$:

$$R^{TE} = \frac{\eta_2 \cdot cos(\theta_i) - \eta_1 \cdot cos(\theta_t)}{\eta_2 \cdot cos(\theta_i) + \eta_1 \cdot cos(\theta_t)} = -0.41$$

$$T^{TE} = \frac{2 \cdot \eta_2 \cdot cos(\theta_i)}{\eta_2 \cdot cos(\theta_i) + \eta_1 \cdot cos(\theta_t)} = 0.59$$

Nesse panorama, os vetores de onda refletida $\vec{k_r}$ e transmitida $\vec{k_t}$ são dados por:

$$\vec{k_r} = k_{rx}\,\hat{x} + k_{rz}\,\hat{z} = k_1\,[sen(\theta_r)\,\hat{x} - cos(\theta_r)\,\hat{z}]$$
$$\vec{k_t} = k_{tx}\,\hat{x} + k_{tz}\,\hat{z} = k_2\,[sen(\theta_t)\,\hat{x} + cos(\theta_t)\,\hat{z}]$$

onde,

$$k_1 = |\vec{k_1}| = \sqrt{k_{ix}^2 + k_{iz}^2} = 5\ m^{-1}$$

e

$$k_2 = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_R} = k_1 \cdot \sqrt{\epsilon_R} = 10\ m^{-1}$$

Assim,

$$\vec{k_r} = 3\hat{x} - 4\hat{z}$$
$$\vec{k_t} = 3\hat{x} + 9.54\hat{z}$$

A partir da lei de Faraday, pode-se encontrar as componentes do campo magnético partindo do campo elétrico:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \iff \vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu}$$

Dessa maneira, seja $E_0 = 20$ V/m a amplitude do campo elétrico incidente, os campos elétrico e magnéticos refletidos e transmitidos serão descritos por:

(i) Campos de onda refletida

$$\vec{E_R} = R^{TE} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k_r}\cdot\vec{r}}\,\hat{y} \Rightarrow \vec{E_R} = R^{TE} \cdot E_0 \cdot e^{-j(3x-4z)}\,\hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{E_R} = -8.18\ e^{-j(3x-4z)}\ \hat{y}\ \text{V/m}}$$

$$\vec{H_R} = \frac{R^{TE} \cdot E_0 \cdot k_1}{\omega\mu_1}\,[cos(\theta_r)\,\hat{x} + sen(\theta_r)\,\hat{z}] \cdot e^{-j(\vec{k_r}\cdot\vec{r})} \Rightarrow$$

$$\vec{H_R} = \frac{R^{TE} \cdot E_0}{\eta_1}\,[cos(\theta_r)\,\hat{x} + sen(\theta_r)\,\hat{z}] \cdot e^{-j(3x-4z)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{H_R} = -21.71\ (0.8\ \hat{x}\ +\ 0.6\ \hat{z})\ e^{-j(3x-4z)}\ \text{mA/m}}$$

(ii) Campos de onda transmitida

$$\vec{E_T} = T^{TE} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k_t}\cdot\vec{r}}\,\hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{E_T} = 11.82\ e^{-j(3x+9.54z)}\ \hat{y}\ \text{V/m}}$$

$$\vec{H_T} = \frac{T^{TE} \cdot E_0}{\eta_2} \left[-cos(\theta_t)\,\hat{x} + sen(\theta_t)\,\hat{z}\right] \cdot e^{-j(3x+9.54z)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{H_T} = 62.72\ (-0.95\hat{x}\ +\ 0.3\ \hat{z})\ e^{-j(3x+9.54z)}\ \text{mA/m}}$$

2 Questão 2

(a) Seja a velocidade da luz equivalente a $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3\cdot 10^8$ m/s, a velocidade de fase v_p é dada por:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} \iff v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\,\epsilon_R}}$$

Logo, $\boxed{v_p = 1\cdot 10^8 \text{ m/s}}$

(b) O número de onda é dado por:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_R\,\epsilon_R} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\mu_R\,\epsilon_R}$$

Portanto, $\boxed{\text{k} = 20\pi \text{ m}^{-1} = 62.83 \text{ m}^{-1}}$

(c) O comprimento de onda é equivalente a:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0.1 \text{ m}}$$

(d) Seja o campo elétrico dado por:

$$\vec{E}\,(z,\,t) = Re\left\{E_0 e^{j(\omega t - kz + \phi)}\right\}\hat{x} = E_0\,cos(\omega t - kz + \phi)\,\hat{x}$$

Assim, seja $E_0 = 100$ V/m,

$$\vec{E}\,(z=0,\,t=0) = 100\,cos(\phi)\,\hat{x} = 50\,\hat{x}\ [V/m] \Rightarrow$$
$$cos(\phi) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

Logo,

$$\vec{E}\,(z=\lambda/2,\,t=0) = 100\,cos(-k\cdot\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{3})\,\hat{x} = 100\,cos(-\pi + \frac{\pi}{3})\,\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}\,(z=\lambda/2,\,t=0) = -50\ \hat{x}\ \text{V/m}}$$

(e) Da questão anterior, constata-se que o campo $\vec{E}\,(z=\lambda/2,\,t=0)$ está defasado de 180° do campo $\vec{E}\,(z=0,\,t=0)$, logo, estão **fora de fase**.

(f) Os fasores serão dados por:

$$\boxed{\vec{E}\,(z=0) = 100\ e^{j\frac{\pi}{3}}\ \hat{x}\ \text{V/m}}\ \boxed{\vec{E}\,(z=0.05) = -100\ e^{j\frac{\pi}{3}}\ \hat{x}\ \text{V/m}}$$

3 Questão 3

(a) Como a onda incidente está circularmente polarizada à esquerda (LHC) do ponto de vista da fonte, espera-se que, sendo o plano de polarização $x - y$, a componente y do campo esteja avançada de $\Delta\phi = \pi/2$ com relação à componente x, além de $E_1 = E_2$. Assim, supondo propagação na direção $+z$ com incidência normal:

$$E_x^i(z,\, t) = E_1\, cos(\omega t - kz)$$
$$E_y^i(z,\, t) = E_1\, cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$$

Então:

$$\vec{E}_i(z,\, t) = E_x^i(z,\, t)\,\hat{x} + E_y^i(z,\, t)\,\hat{y}$$
$$\vec{E}_i(z,\, t) = E_1\left[cos(\omega t - kz)\,\hat{x} + cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})\,\hat{y}\right]$$

$$\boxed{\vec{E}_i(z,\, t) = E_1\,[cos(\omega t - kz)\,\hat{x} - sen(\omega t - kz)\,\hat{y}]}$$

Seja $cos(\omega t + \phi) = Re\left\{e^{j(\omega t + \phi)}\right\}$, então:

$$\vec{E}_i(z,\, t) = Re\left\{E_1 e^{j(\omega t - kz)}\hat{x} + E_1 e^{j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})}\hat{y}\right\}$$
$$\vec{E}_i(z,\, t) = Re\left\{E_1\left(e^{-jkz}\hat{x} + e^{-j(kz - \frac{\pi}{2})}\hat{y}\right)e^{j\omega t}\right\}$$

Logo, a forma fasorial será dada:

$$\vec{E}_i(z) = E_1\left(\hat{x} + e^{j\frac{\pi}{2}}\hat{y}\right)e^{-jkz}$$

$$\boxed{\vec{E}_i(z) = E_1\,(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{-jkz}}$$

Aplicação numérica: nesse panorama, supondo que a onda se propaga no ar (vácuo) e incide no meio dielétrico, a constante de propagação deve ser equivalente à:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow k = \frac{4\pi}{3}\ m^{-1}$$

Logo, sejam igualmente $|\vec{E}_i(z,\, t)| = E_1 = 10$ V/m e $\omega = 2\pi f = 1.26 \cdot 10^9$ s^{-1}, tem-se:

$$\boxed{\vec{E}_i(z,\, t) = 10\left[cos(1.26 \cdot 10^9\, t - \tfrac{4\pi}{3}z)\,\hat{x} - sen(1.26 \cdot 10^9\, t - \tfrac{4\pi}{3}z)\,\hat{y}\right]\ \text{V/m}}$$

$$\boxed{\vec{E}_i(z) = 10\,(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{-j\frac{4\pi}{3}z}\ \text{V/m}}$$

(b) Seja a impedância característica do primeiro meio (z $\leq$ 0) equivalente a $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi\ \Omega$ e a impedância do segundo meio (z $\geq$ 0), $\eta_2 = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = 60\pi\ \Omega$, considerando incidência normal ($\theta_i = \theta_t = 0°$), tem-se:

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \boxed{R^{TE} = -\tfrac{1}{3}}$$

$$T = \frac{2 \cdot \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \boxed{T = \tfrac{2}{3}}$$

(c) Dada a situação descrita pelo enunciado, tem-se:

$$\vec{k_r} = k_{rz}\,\hat{z} = -\frac{4\pi}{3}\hat{z}$$

$$\vec{k_t} = k_{tz}\,\hat{z} = k_2\hat{z} = k_1\sqrt{\mu_R\epsilon_R}\,\hat{z} = \frac{8\pi}{3}\hat{z}$$

Dessa forma, o campo refletido será dado por:

$$\vec{E_r}(z) = E_1 \cdot R \cdot (\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{j\frac{4\pi}{3}z}$$

$$\boxed{\vec{E_r}(z) = -\tfrac{10}{3}(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{j\frac{4\pi}{3}z}\ \text{V/m}}$$

Já o campo transmitido deve ser dado por:

$$\vec{E_t}(z) = T \cdot E_1 \cdot (\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{-j\frac{8\pi}{3}z}$$

$$\boxed{\vec{E_t}(z) = \tfrac{20}{3}(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{-j\frac{8\pi}{3}z}\ \text{V/m}}$$

Por fim, o campo total em $z \leq 0$ será:

$$\vec{E_T}(z \leq 0) = \vec{E_i}(z) + \vec{E_r}(z)$$

$$\vec{E_T}(z \leq 0) = 10\,(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{-j\frac{4\pi}{3}z} - \frac{10}{3}(\hat{x} + j\,\hat{y})\,e^{j\frac{4\pi}{3}z}$$

$$\boxed{\vec{E_T}(z \leq 0) = 10\,(\hat{x} + j\,\hat{y})\left(e^{-j\frac{4\pi}{3}z} - \tfrac{1}{3} \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}z}\right)\ \text{V/m}}$$

4 Questão 4

De antemão, para meios isotrópicos não-magnéticos ou que operam em frequências ópticas, seja $\mu_R = 1$, tem-se:

$$n = c\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon_R\,\mu_R} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_R} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \epsilon_0\, n^2}$$

De forma análoga, para meios anisotrópicos biaxiais, estudados no sistema de coordenadas cartesianas $(x,\, y,\, z)$, tem-se:

$$\boxed{\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} {n'_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {n'_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {n'_z}^2 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \cdot \bar{\bar{n}}}$$

onde $\bar{\bar{n}}$ é o tensor de permissividade relativa. Logo, do enunciando da questão, tem-se $n_1 = 1.0$, $n_x = {n'_x}^2 = 1.6$, $n_y = {n'_y}^2 = 1.7$, $n_z = {n'_z}^2 = 1.5$, $n_2 = 2.0$ e $n_4 = 1.45$.

Supondo polarização TM, o campo magnético será da forma $\vec{H} = H_y\,\hat{y}$, enquanto o campo elétrico deve assumir a forma $\vec{E} = E_x\,\hat{x} + E_z\,\hat{z}$. Assim, deriva-se a Eq. de Helmholtz em polarização TM para as:

(i) Camadas isotrópicas ($i = 1$, 2 e 4)

Dadas a equações de Maxwell a seguir:

$$\nabla \times \vec{H}^{(i)} = j\omega\epsilon_0 n_i^2 \vec{E}^{(i)} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{E}^{(i)} = -j\omega\mu_0 \vec{H}^{(i)} \tag{2}$$

Encontra-se a partir da Eq.(1) que:

$$\frac{\partial H_y^{(i)}}{\partial z} = -j\omega\epsilon_0 n_i^2 E_x^{(i)} \tag{3}$$

$$\frac{\partial H_y^{(i)}}{\partial x} = j\omega\epsilon_0 n_i^2 E_z^{(i)} \tag{4}$$

e, a partir da Eq.(2), que:

$$\frac{\partial E_x^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(i)}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y^{(i)} \tag{5}$$

Aplicando as Eqs.(3) e (4) na Eq.(5), deve-se encontrar:

$$\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial x^2} + \omega^2\epsilon_0\mu_0 n_i^2 H_y^{(i)} = 0 \tag{6}$$

Assumindo que a componente $H_y^{(i)}$ do campo magnético é descrita por uma função do tipo

$$H_y^{(i)}(x,\, z) = h_y(x)\, e^{-j\beta z},$$

então a Eq.(6) pode ser, finalmente, reescrita como:

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial x^2} + (k_0^2\, n_i^2 - \beta^2) H_y^{(i)} = 0}$$

onde $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ e define-se igualmente:

$$\boxed{\kappa_i = \sqrt{k_0^2\, n_i^2 - \beta^2}}$$

(ii) Camadas anisotrópicas ($i = 3$)

Dadas a equações de Maxwell a seguir:

$$\nabla \times \vec{H}^{(i)} = j\omega\epsilon_0 \overline{\overline{n}} \vec{E}^{(i)} \tag{7}$$

$$\nabla \times \vec{E}^{(i)} = -j\omega\mu_0 \vec{H}^{(i)} \tag{8}$$

Encontra-se a partir da Eq.(7) que:

$$\frac{\partial H_y^{(i)}}{\partial z} = -j\omega\epsilon_0 n_x E_x^{(i)} \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_y^{(i)}}{\partial x} = j\omega\epsilon_0 n_z E_z^{(i)} \tag{10}$$

e, a partir da Eq.(8), que:

$$\frac{\partial E_x^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(i)}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y^{(i)} \tag{11}$$

Aplicando as Eqs.(9) e (10) na Eq.(11), deve-se encontrar:

$$\frac{1}{n_x}\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{n_z}\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial x^2} + \omega^2\epsilon_0\mu_0 H_y^{(i)} = 0 \tag{12}$$

Assumindo que a componente $H_y^{(i)}$ tem a mesma forma considerada para o meio isotrópico, a Eq.(12) pode ser rearranjada para:

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial x^2} + \left[k_0^2\, n_z - \beta^2 \left(\frac{n_z}{n_x}\right)\right] H_y^{(i)} = 0}$$

No caso anisotrópico, define-se, de forma análoga,

$$\boxed{\kappa_i = \sqrt{\frac{n_z}{n_x}} \cdot \sqrt{k_0^2\, n_x - \beta^2}}$$

(a) Para as camadas isotrópicas (i = 1,2 e 4), se, em determinada camada i tem-se uma onda em comportamento oscilatório, espera-se que $\mathcal{K}_i$ seja puramente real e logo:

$$\mathcal{K}_i = k_i = \sqrt{k_0^2\, n_i^2 - \beta^2}$$

Entretanto, caso a onda na camada tenha comportamento evanescente (decaimento exponencial), espera-se que $\mathcal{K}_i$ seja puramente imaginário. Portanto:

$$\mathcal{K}_i = jk_i = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_i^2} \Rightarrow k_i = \sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_i^2}$$

Nesse sentido, como $k_i \in \mathbb{R}$, então, para o caso:

(i) Oscilatório

$$k_0^2\, n_i^2 - \beta^2 > 0 \iff n_i^2 > \frac{\beta^2}{k_0^2} \Rightarrow n_i^2 > n_{eff}^2 \iff \boxed{n_i > n_{eff}}$$

(ii) Evanescente

$$\beta^2 - k_0^2\, n_i^2 > 0 \iff n_i^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} \Rightarrow n_i^2 < n_{eff}^2 \iff \boxed{n_i < n_{eff}}$$

Já, para as camadas anisotrópicas (i = 3), se houver comportamento oscilatório da camada, tem-se $\mathcal{K}_i$ seja puramente imaginário:

$$\mathcal{K}_i = k_i = \sqrt{\frac{n_z}{n_x}} \cdot \sqrt{k_0^2\, n_x - \beta^2}$$

Para onda evanescente na camada anisotrópica, espera-se:

$$\mathcal{K}_i = jk_i = j\sqrt{\frac{n_z}{n_x}} \cdot \sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_x} \Rightarrow k_i = \sqrt{\frac{n_z}{n_x}} \cdot \sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_x}$$

De forma análoga à situação isotrópica, espera-se $k_i \in \mathbb{R}$. Assim:

(i) Oscilatório

$$k_0^2\, n_x - \beta^2 > 0 \iff n_x > \frac{\beta^2}{k_0^2} \Rightarrow n_x > n_{eff}^2 \iff \boxed{\sqrt{n_x} > n_{eff}}$$

(ii) Evanescente

$$\beta^2 - k_0^2\, n_x > 0 \iff n_x < \frac{\beta^2}{k_0^2} \Rightarrow n_x < n_{eff}^2 \iff \boxed{\sqrt{n_x} < n_{eff}}$$

A partir dos valores informados pelo enunciado, sabe-se que:

$$n_1 < \sqrt{n_x} < n_4 < n_2$$

Como $n_1 = 1$, assume-se que o índice de refração efetivo seja sempre $n_{eff} > n_1$ para que não se tenha $k < k_0$. Além disso, tendo em vista o objetivo de um guia de onda, deseja-se que haja confinamento de onda em ao menos uma camada. Dessa forma, o caso em que $n_{eff} > n_2$ inutiliza o guia de onda, pois levaria a decaimento exponencial em todas as camadas. Essa situação será igualmente descartada. Portanto, existem **3 soluções** possíveis para as condições de radiação:

	Comportamento da camada i			
Caso	**1**	**2**	**3**	**4**
$n_1 < n_{eff} < \sqrt{n_x}$	Evanescente	Oscilatório	Oscilatório	Oscilatório
$\sqrt{n_x} < n_{eff} < n_4$	Evanescente	Oscilatório	Evanescente	Oscilatório
$n_4 < n_{eff} < n_2$	Evanescente	Oscilatório	Evanescente	Evanescente

Tabela 1: Limite de variação de n_{eff} e comportamento nas camadas para cada uma das soluções úteis do guia de onda.

(b) Adota-se, desse item em diante, o limite de variação:

$$n_4 < n_{eff} < n_2 \Rightarrow \boxed{1.45 < n_{eff} < 2.0}$$

(c) Considerando a Eq. genérica de Helmholtz das camadas isotrópicas e anisotrópicas:

$$\frac{\partial^2 H_y^{(i)}}{\partial x^2} + \mathcal{K}_i^2 H_y^{(i)} = 0,$$

seja o campo magnético nas camadas da forma $H_y^{(i)}(x,\, z) = h_y^{(i)}(x)\, e^{-j\beta z}$, então pode-se reescrever a equação como:

$$\frac{d^2 h_y^{(i)}(x)}{dx^2} + \mathcal{K}_i^2 h_y^{(i)}(x) = 0$$

A EDO acima tem solução geral:

$$h_y^{(i)}(x) = C_1 e^{j\mathcal{K}x} + C_2 e^{-j\mathcal{K}x}$$

Assim, para a situação adotada no item (c), tem-se:

(i) Camada 1 (w $\leq$ x $\leq$ w + d)

$$\mathcal{K}_1 = jk_1 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_1^2} \Rightarrow$$
$$h_y^{(1)}(x) = C_3\, e^{-k_1(x-w)} + C_4\, e^{k_1(x-w)} \tag{13}$$

Sabe-se que em $x =$ w + d, o campo magnético deve ser nulo, logo:

$$C_3 e^{-k_1 d} + C_4 e^{k_1 d} = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = -C_4 e^{2k_1 d}} \tag{14}$$

(ii) Camada 2 (−w ≤ x ≤ w)

$$\mathcal{K}_2 = k_2 = \sqrt{k_0^2\, n_2^2 - \beta^2} \Rightarrow$$

$$h_y^{(2)}(x) = C_5' e^{jk_2 x} + C_6' e^{-jk_2 x} \Rightarrow$$
$$h_y^{(2)}(x) = (C_5' + C_6')\, cos(k_2 x) + j(C'5 - C_6')\, sen(k_2 x) \Rightarrow$$
$$h_y^{(2)}(x) = C_5\, cos(k_2 x) + C_6\, sen(k_2 x) \tag{15}$$

(iii) Camada 3 (−t−w ≤ x ≤−w)

$$\mathcal{K}_3 = jk_3 = j\sqrt{\frac{n_z}{n_x}} \cdot \sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_x} \Rightarrow$$

$$h_y^{(3)}(x) = C_7\, e^{-k_3(x+w)} + C_8\, e^{k_3(x+w)} \tag{16}$$

(iv) Camada 4 (x ≤ −t−w)

$$\mathcal{K}_4 = jk_4 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2\, n_4^2} \Rightarrow$$
$$h_y^{(4)}(x) = C_9\, e^{-k_4(x+w+t)} + C_{10}\, e^{k_4(x+w+t)} \tag{17}$$

Sabe-se que:

$$\lim_{x \to -\infty} h_y^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{C_9 = 0}$$

Supondo a continuidade dos campos elétrico e magnético na interface entre as camadas, tem-se:

(i) Em x = w:

$$h_y^{(1)}(x = w) = h_y^{(2)}(x = w) \Rightarrow \boxed{C_3 + C_4 = C_5\, cos(k_2 w) + C_6\, sen(k_2 w)} \tag{18}$$

$$e_z^{(1)}(x = w) = e_z^{(2)}(x = w) \Rightarrow \boxed{\frac{k_1}{n_1^2}(-C_3 + C_4) = \frac{k_2}{n_2^2}\left[-C_5\, sen(k_2 w) + C_6 cos(k_2 w)\right]} \tag{19}$$

(ii) Em x = −w:

$$h_y^{(2)}(x = -w) = h_y^{(3)}(x = -w) \Rightarrow \boxed{C_7 + C_8 = C_5\, cos(k_2 w) - C_6\, sen(k_2 w)} \tag{20}$$

$$e_z^{(2)}(x = -w) = e_z^{(3)}(x = -w) \Rightarrow \boxed{\frac{k_2}{n_2^2}\left[C_5\, sen(k_2 w) + C_6 cos(k_2 w)\right] = \frac{k_3}{n_z}(-C_7 + C_8)} \tag{21}$$

(iii) Em x = −w−t:

$$h_y^{(3)}(x = -w - t) = h_y^{(4)}(x = -w - t) \Rightarrow \boxed{C_7\, e^{k_3 t} + C_8\, e^{-k_3 t} = C_{10}} \tag{22}$$

$$e_z^{(3)}(x = -w - t) = e_z^{(4)}(x = -w - t) \Rightarrow \boxed{\frac{k_3}{n_z}\left(-C_7\, e^{k_3 t} + C_8\, e^{-k_3 t}\right) = \frac{k_4}{n_4^2} C_{10}} \tag{23}$$

Com esses resultados, aplicando a Eq.(14) nas Eq.(18) e Eq.(19), encontra-se:

$$C_4\left(1 - e^{2k_1 d}\right) = C_5\, cos(k_2 w) + C_6\, sen(k_2 w) \tag{24}$$
$$A \cdot C_4\left(1 + e^{2k_1 d}\right) = -C_5\, sen(k_2 w) + C_6\, cos(k_2 w) \tag{25}$$

onde

$$A = \frac{k_1\, n_2^2}{k_2\, n_1^2}$$

Dividindo a Eq.(25) pela Eq.(24), encontra-se:

$$\boxed{C_5 = \left[\frac{1 - B \cdot tg(k_2 w)}{B + tg(k_2 w)}\right] C_6} \tag{26}$$

onde

$$B = A\,\frac{1 + e^{2k_1 d}}{1 - e^{2k_1 d}}$$

Dividindo a Eq.(23) pela Eq.(22), encontra-se:

$$\boxed{C_8 = \left(\frac{1 + C}{1 - C} \cdot e^{2k_3 t}\right) C_7} \tag{27}$$

onde

$$C = \frac{k_4\, n_z}{k_3\, n_4^2}$$

Retornando a Eq.(27) na Eq.(22), encontra-se que:

$$\boxed{C_{10} = \left(\frac{2}{1 - C} \cdot e^{k_3 t}\right) C_7}$$

Sejam igualmente

$$D = \frac{1 + C}{1 - C} \cdot e^{2k_3 t} \quad e \quad E = \frac{k_3\, n_2^2}{k_2\, n_z}$$

então, aplicando a Eq.(27) nas Eqs.(20) e (21), tem-se:

$$C_5\, cos(k_2 w) - C_6\, sen(k_2 w) = (1 + D)\, C_7 \tag{28}$$
$$C_5\, sen(k_2 w) + C_6\, cos(k_2 w) = E(D - 1)\, C_7 \tag{29}$$

Dividindo a Eq.(28) pela Eq.(29), encontra-se:

$$\boxed{C_5 = \left[\frac{F + tg(k_2 w)}{1 - F \cdot tg(k_2 w)}\right] C_6} \tag{30}$$

onde

$$F = \frac{1+D}{E(D-1)}$$

Finalmente, igualando as Eqs.(26) e (30) encontra-se a equação transcendental:

$$\boxed{tg(k_2w) = \frac{[1 - B \cdot tg(k_2w)][1 - F \cdot tg(k_2w)]}{B + tg(k_2w)} - F}$$