QUESTÃO T3

Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vetores tais que $\|\vec{a}\| = \sqrt{35}$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = (1,-1,2)_E$ e $\vec{a} \wedge \vec{c} = (2,1,-1)_E$, onde E é uma base $\overset{\text{O.N.}}{\text{positiva}}$. Sabendo que $B = (\vec{a}, \vec{a}\wedge\vec{b}, \vec{a}\wedge\vec{c})$ é base positiva de V^3, determine o vetor $\vec{a}$.

1º MODO:

Da definição de produto vetorial, sabe-se que

$$\vec{a} \perp \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \text{e} \quad \vec{a} \perp \vec{a} \wedge \vec{c}.$$

Seja $\vec{a} = (x,y,z)_E$, $x,y,z \in \mathbb{R}$. Assim,

pode-se usar a fórmula em coordenadas do produto escalar porque E é O.N.

$$\begin{cases} \langle \vec{a}, \vec{a}\wedge\vec{b} \rangle = 0 \\ \langle \vec{a}, \vec{a}\wedge\vec{c} \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle (x,y,z)_E, (1,-1,2)_E \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z)_E, (2,1,-1)_E \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \quad (1) \\ 2x + y = z \quad (2) \end{cases}$$

Usando (2) em (1): $x - y + 2(2x+y) = 0$

$$\Rightarrow x - y + 4x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -5x} \quad (3)$$

Usando (3) em (2): $2x - 5x = z \Rightarrow \boxed{z = -3x}$ (4)

tudo bem escrever $\sqrt{\langle a,a \rangle}$, pois o produto interno é positivo definido!

Além disso, do enunciado, $\|\vec{a}\| = \sqrt{35} \Leftrightarrow \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{35} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 35$.

Logo,

$$35 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle (x,y,z)_E, (x,y,z)_E \rangle = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 35 \quad (5)$$

Usando (3) e (4) em (5):

$$x^2 + (-5x)^2 + (-3x)^2 = 35 \Rightarrow x^2 + 25x^2 + 9x^2 = 35 \Rightarrow 35x^2 = 35.$$

Desse modo, $x = \pm 1$, isto é, $\vec{a} = (1,-5,-3)_E$ ou $\vec{a} = (-1,5,3)_E$. Para decidir, basta averiguar qual das opções torna B base positiva.

Sabe-se que E é uma base positiva, então é uma boa ideia estudar a matriz de mudança de base de B para E (ou vice-versa, tanto faz).

Então, para $\vec{a} = (1,-5,-3)_E$:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_E & (\vec{a}\wedge\vec{b})_E & (\vec{a}\wedge\vec{c})_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det M_{EB} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)(-1) + 1\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot(-5)\cdot 2 - (-3)(-1)2 - 2\cdot 1\cdot 1 - (-1)(-5)\cdot 1 =$$

$$= 1 + 3 - 20 - 6 - 2 - 5 < 0.$$

Assim, se $\vec{a} = (1,-5,-3)_E$, então B é uma base negativa. Mas isso é uma contradição com a hipótese do enunciado. Logo, $\vec{a} = (-1,5,3)_E$ //

(Por desencargo de consciência...)

Se $\vec{a} = (-1,5,3)_E$:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det M_{EB} = 1(-1)(-1) + 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 2 - 3(-1)2 - 2\cdot 1(-1) - (-1)5\cdot 1 =$$

$$= 1 + 3 + 20 + 6 + 2 + 5 > 0.$$

Portanto, para $\vec{a} = (-1,5,3)_E$, B é uma base negativa.

Resposta final: $\vec{a} = (-1,5,3)_E$ //

2º MODO:

$\{\vec{a}\wedge\vec{b}, \vec{a}\wedge\vec{c}\}$ é um conjunto L.I. (é claramente verificável pelas coordenadas dos vetores). Assim, as combinações lineares desses vetores geram um plano em $\mathbb{R}^3$. Sabe-se que apenas uma direção é perpendicular a um plano, e, no caso, $\vec{a} \perp \vec{a}\wedge\vec{b}$ e $\vec{a} \perp \vec{a}\wedge\vec{c}$. Logo, $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c})$ é múltiplo de $\vec{a}$.

Vale essa fórmula pois E é O.N.

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1,5,3)_E$$

Verificando a norma desse vetor:

$$\|(-1,5,3)_E\| = \langle(-1,5,3)_E, (-1,5,3)_E\rangle = 1 + 25 + 9 = 35.$$

Por coincidência, $(-1,5,3)_E$ já tem a norma de $\vec{a}$. Desse modo, $\vec{a}$ pode ser $(-1,5,3)_E$ ou $(1,-5,-3)_E$. Agora, basta analisar a matriz de mudança de base de B para E para decidir quem é o $\vec{a}$, como no 1º MODO, e concluir que $\vec{a} = (-1,5,3)_E$ //