1. (Problema de Dirichlet em anel, separação de variáveis). Considere a coroa circular

$$C_{1,R} = \{(r,\theta) : 1 < r < R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

   (a) Dados g e h de classe $C^1(\mathbb{R})$ e periódicas e de período 2π, determine a solução de problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } C_{1,R} \\ u(1,\theta) = g(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(R,\theta) = h(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

   (b) Resolva o problema quando $g(\theta) = \sin\theta$ e $h(\theta) = 1$.
   (Resposta: $u(r,\theta) = \dfrac{\ln r}{\ln R} + \dfrac{R^2 - r^2}{(R^2-1)r}\sin\theta$.)

2. Seja D um aberto e conexo em $\subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que uma função $u \in C^2(D)$ é subharmônica (respectivamente, superharmônica) em D se $\Delta u \ge 0$ (respectivamente, $\Delta u \le 0$) em D.

   (a) Seja $x_0 \in D$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset D$. Prove que se u é subharmônica em D então

$$u(x_0) \le \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(x_0)} u ds.$$

   (b) (Princípio do máximo (forte) para funções subharmônicas) Suponha que u é subhamônica em D e atinge seu máximo em D, mostre que u é constante.

   (c) Suponha D limitado e $u, v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ contínuas, com v harmônica em D, u subharmônica em D e $u \le v$ sobre ∂D. Prove que $u \le v$ em D.

   (d) Enuncie o resultado os resultados dos itens anteriores para funções superharmônicas.

3. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Prove que a única solução do problema

$$\begin{cases} u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \\ \Delta u = u^3 \text{ em } D \\ u = 0 \text{ sobre } \partial D \end{cases}$$

   é $u \equiv 0$.

   (Sugestão: Use os resultados do Exercício 2.

4. Seja D um domínio limitado de classe C^1 em $\subset \mathbb{R}^2$. Use a primeira identidade de Green para provar que o problema

$$\begin{cases} v \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \\ -\Delta v = \lambda v \text{ em } D \\ v = 0 \text{ sobre } \partial D \end{cases}$$

só possui solução não trivial se $\lambda > 0$.

Solução. Para $\lambda = 0$, o princípio do máximo diz que a a única solução deste problema é $v \equiv 0$. Para $\lambda \neq 0$ e $v \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ solução deste problema implica que

$$\Delta v = -\lambda v \in C^2(D) \cap C(\overline{D}).$$

Portanto $v \in C^2(\overline{D})$. Usando a primeira identidade de com $u = v$, obtemos

$$\int_D v\Delta v dX = \int_{\partial D} v\frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_D \nabla v \nabla v dX.$$

Como $-\Delta v = \lambda v$, $v = 0$ sobre ∂D e $v \neq 0$, obtemos

$$\lambda \int_D v^2 dX = \int_D |\nabla v|^2 dX > 0,$$

ou seja, $\lambda > 0$.

5. (Princípio da reflexão de Schwarz). Seja

$$B_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

e seja $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$ harmônica em B_1^+ e tal que $u(x, 0) = 0$. Prove que a função

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & y \geq 0 \\ -u(x, -y) & y < 0 \end{cases}$$

obtida de u por reflexão ímpar em relação ao eixo x, é harmônica em todo a bola B_1. (Sugestão. Seja v a solução de $\Delta v = 0$ em B_1, $v = U$ sobre ∂B_1. Defina

$$w(x, y) = v(x, y) + v(x, -y)$$

e mostre que $w \equiv 0 \ldots$).

Solução. Seja $v \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ solução de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_1 \\ v = U & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases}$$

cuja existência é garantida pela fórmula de Poisson. Defina a função

$$w(x, y) = v(x, y) + v(x, -y).$$

Como a função $v(x, -y)$ também é harmônica em B_1 e satisfaz a condição de fronteira de v com sinal oposto, a função w satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B_1 \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases}$$

e portanto $w \equiv 0$, pois, pelo princípio do máximo, 0 é a única solução deste problema. Consequentemente,

$$v(x,y) = -v(x,-y) \quad \forall (x,y) \in \overline{B_1}.$$

Em particular,

$$v(x,0) = -v(x,0)\ \forall\, |x| \leq 1 \ \Rightarrow\ v(x,0) = 0\ \forall\, |x| \leq 1.$$

Logo v, U e u são soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{em } B_1^+ \\ z = u & \text{sobre } \partial B_1^+, \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo, $v \equiv U \equiv u$ em B_1^+. Finalmente, sendo v e U funções ímpares e coincidentes em $\overline{B_1^+}$, segue que $U = v$ em B_1, e portanto U é harmônica em B_1.

6. Dada $g \in C(\mathbb{R})$ limitada, mostre a unicidade de solução limitada e contínua no semi-plano $y \geq 0$ do problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Sugestão: Sejam u_1 e u_2 soluções limitadas desse problema. Estenda a função $w = u_1 - u_2$ de modo impar para $y < 0$).

Solução. Se u_1 e u_2 são soluções deste problema, então $w = u_1 - u_2$ satifaz

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0 \\ w(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Usando o princípio de reflexão de Schwarz, w tem uma extensão ímpar para $y < 0$ que é harmônica e limitada em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Liouville, a extensão é constante. A constante é zero pois $w = 0$ para $y = 0$. Portanto $u_1 = u_2$.

Comentário. Compare este exercício com o exercício 2 da lista 11.

7. (Uso do princípio da reflexão dado no Exercício 5).

   (a) Resolva o seguinte problema em $B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$

   $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1^+ \\ u = g & \text{sobre } \partial B_1^+ \end{cases}$$

   com g continua em ∂B_1^+.

(b) Analise o caso $g(x) = |x|$.

(Sugestão: para aplicar o princípio de reflexão, modifique u de modo que o dado de fronteira seja nulo sobre o diâmetro $y = 0$. Defina

$$h(x) = \begin{cases} g(-1) & x < -1 \\ g(x) & -1 \leq x \leq 1 \\ g(1) & 1 < x, \end{cases}$$

Seja a v a solução de $\Delta v = 0$ no semiplano $\mathbb{R}^2_+$, $v = h$ sobre $\partial\mathbb{R}^2_+$. Defina $w = u - v$ e aplique o principio de reflexão).

Solução. (a) Vamos usar o princípio da reflexão, mas antes precisamos modificar o problema para ter condição de fronteira nula em $\{(x, 0), -1 \leq x \leq 1\}$. Defina

$$h(x) = \begin{cases} g(-1, 0) & x < -1 \\ g(x, 0) & -1 \leq x \leq 1 \\ g(1, 0) & 1 < x, \end{cases}$$

A função h assim definida é contínua e limitada em $\mathbb{R}$ e coincide com $g(x, 0)$ em $\{(x, 0), |x| \leq 1\}$. Seja a v a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2_+ \\ v = h & \text{sobre } \partial\mathbb{R}^2_+ \end{cases}$$

Pelo exercício 3 da lista 11, v é dada por

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - s)^2 + y^2} h(s) ds.$$

Defina

$$w = u - v.$$

A função w é harmônica em B_1^+, $w(x, 0) = 0$ para $|x| \leq 1$ e $w(x, y) = g(x, y) - v(x, y)$ sobre $\partial B_1^+ \cap \{(x, y), y > 0\}$. Agora estendemos a função $\tilde{g} = g - v$ de modo ímpar em $\partial B_1 \cap \{(x, y), y < 0\}$. Do princípio da reflexão e pela fórmula de Poisson, sabemos que

$$w(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{2\pi} \int_{\partial B_1} \frac{\tilde{g}(\xi, \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} ds$$

Portanto a solução é $u(x, y) = w(x, y) + v(x, y)$

(b) Neste caso

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x, \end{cases}$$

e

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y}{(x-s)^2+y^2}|s|ds + \frac{1}{\pi}\int_{|s|>1} \frac{y}{(x-s)^2+y^2}ds.$$

A função $w := u - v$ é harmônica em B_1^+, $w(x,0) = 0$ para $|x| \leq 1$ e $w(x,y) = |x| - v(x,y)$ sobre $\partial B_1^+ \cap \{(x,y), y > 0\}$. Estendemos a função $\tilde{g}(x,y) = |x| - v(x,y)$ de modo ímpar em $\partial B_1 \cap \{(x,y), y < 0\}$, obtemos,

$$\tilde{g}(x,y) = |x|\text{sinal}(y) - v(x,y)$$

e portanto

$$w(x,y) = \frac{1-(x^2+y^2)}{2\pi}\int_{\partial B_1} \frac{|\xi|\text{sinal}(\eta) - v(\xi,\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}ds$$

Portanto a solução é $u(x,y) = w(x,y) + v(x,y)$.

Comentário: uma alternativa de resolução desta questão seria usar a função de Green na meia bola.