1. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, conexo e limitado de classe C^1. Obtenha a fórmula de representação para funções harmônicas em dimensão 2, ou seja, mostre que se $\Delta u = 0$ em D e $X_0 \in D$, então
$$u(X_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\partial D} \left[u(X) \frac{\partial}{\partial \eta} (\ln |X - X_0|) - \frac{\partial u}{\partial \eta} \ln |X - X_0| \right] dS.$$

2. Observe que a função $u(x, y) = xy$ é harmônica no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ e se anula na fronteira $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. A função $v(x, y) = 0$ tem as mesmas propriedades. Isso significa que a solução não é única? Há contradição com a fórmula de representação e o princípio do máximo? Explicar.

3. (a) Encontre a função de Green para o semiplano $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.
   (b) Use-a para resolver o problema de Dirichlet no semiplano com dado de fronteira $h(x)$ limitada.
   (c) Calcule a solução com $u(x, 0) = 1$.

Solução. Denote $X = (x, y)$ e $X_0 = (x_0, y_0)$. Defina
$$G(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0^*|$$
onde
$$X_0^* = (x_0, -y_0)$$
Como $X_0^* \neq \mathbb{R}^2_+$, a função $\frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0^*|$ é harmônica em $\mathbb{R}^2_+$. Assim, $G(X, X_0)$ é harmônica exceto em X_0. Além disso, como $|X - X_0| = |X - X_0^*|$ para $X \in \partial\mathbb{R}^2_+$, segue que $G(X, x_0) = 0$ para todo $X \in \partial\mathbb{R}^2_+$. Assim, G é a função de Green no semiplano. Em coordenadas, $G(X, X_0)$ se escreve como
$$\begin{aligned} G(X, X_0) &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2] \right) \end{aligned}$$
O vetor normal unitário exterior η na fronteira $\partial\mathbb{R}^2_+$ é $-\vec{j} = (0, -1)$, assim
$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(X, X_0) = \nabla G(X, X_0) \dot{\eta} = -\frac{\partial G}{\partial y}(X, X_0) = \frac{y_0}{\pi[(x - x_0)^2 + y_0^2]}.$$
Portanto a soluçao do problema de Dirichlet no semiplano com dado de fronteira $h(x)$ é
$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

(c) Em particular para $h(x) = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx &= \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx \\
&= \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s^2+y_0^2}ds \\
&= \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[\left(\frac{s}{y_0}\right)^2+1\right]y_0^2}ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{s}{y_0}\right)^2+1}\frac{ds}{y_0} \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{b\to\infty}\arctan\frac{s}{y_0}\Big|_{-b}^{b} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, $u(x, y) = 1$, como deveria ser.

4. (a) Se $u(x, y) = f(x/y)$ é uma função harmônica, resolva a EDO satisfeita por f.
   (b) Mostre que $\partial u/\partial r \equiv 0$, onde r é a coordenada polar dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (c) Suponha que $v(x, y)$ seja qualquer função em no semiplano $\{(x, y) \mid y > 0\}$ tal que $\partial v/\partial r \equiv 0$. Mostre que $v(x, y)$ é uma função do quociente x/y.
   (d) Encontre os valores de fronteira $\lim_{y\to0} u(x, y) = h(x)$.
   (e) Mostre que sua resposta de (c) e (d) concorda com a fórmula do Exercício 3.

5. Encontre a função de Green para a meia-bola

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2, z > 0\}.$$

(Dica: Usar a solução para todo a bola e refleti-la através do plano.)

6. (a) Mostre que se $v(x, y)$ é harmônica, então $u(x, y) = v(x^2 - y^2, 2xy)$ também é harmônica.
   (b) Mostre que a transformação $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ mapeia o primeiro quadrante no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. (Dica: Use polar coordenadas ou variáveis complexas.)

7. (a) Encontre a função de Green para o quadrante $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. (Dica: Use o método de reflexão).

(b) Use sua resposta na parte (a) para resolver o problema de Dirichlet $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em Q, $u(0, y) = g(y)$ para $y > 0$, $u(x, 0) = h(x)$ para $x > 0$.

Solução. Dado $X_0 = (x_0, y_0) \in Q$, considere

$$X_0^* = (x_0, -y_0), \quad X_0' = (-x_0, y_0)$$

suas reflexões em relação ao eixo x e eixo y, respectivamente. Pelo exercício 3, a função de Green no semiplano $H = \mathbb{R}^2_+$ é dada por

$$G_H(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0^*|.$$

Defina

$$\begin{aligned} G(X, X_0) &= G_H(X, X_0) - G_H(X, X_0') \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0^*| - \frac{1}{2\pi} \ln |X - X_0'| + \frac{1}{2\pi} \ln |X - (X_0')^*|. \end{aligned} \tag{1}$$

Como $\frac{1}{2\pi} \ln |X-X_0^*| - \frac{1}{2\pi} \ln |X-X_0'| + \frac{1}{2\pi} \ln |X-(X_0')^*|$ é harmônica em Q. Além disso, como $G_H(X, X_0)$ e $G_H(X, X_0')$ se anulam no eixo x, a função $G(X, X_0)$ também se anula no eixo x. Como $|X - X_0| = |X - X_0'|$ para todo X no eixo y, o primeiro e o terceiro termo em (1) se cancelam. Usando que $(X_0')^* = (X_0^*)'$, o segundo e o quarto termo se cancelam para todo X no eixo y. Assim, $G(x, X_0) = 0$ para $X \in \partial Q$. Poranto $G(X, X_0)$ é a função de Green no primeiro quadrante.

(b) Denotando $X_0 = (x_0, y_0)$ e $X = (x, y)$,

$$\begin{aligned} G(X, X_0) = &\frac{1}{4\pi} \left(\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2] \right) \\ &- \frac{1}{4\pi} \left(\ln[(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \ln[(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2] \right) \end{aligned}$$

Para $X = (x, 0)$,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(X, X_0) = -\frac{\partial G}{\partial y}(X, X_0) = \frac{y_0}{\pi} \left(\frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \frac{1}{(x + x_0)^2 + y_0^2} \right)$$

Para $X = (0, y)$,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(X, X_0) = -\frac{\partial G}{\partial x}(X, X_0) = \frac{x_0}{\pi} \left(\frac{1}{x_0^2 + (y - y_0)^2} - \frac{1}{x_0^2 + (y + y_0)^2} \right)$$

Portanto a solução do problema de Dirichlet é

$$\begin{aligned} u(x, y) = &\frac{y_0}{\pi} \int_0^\infty h(x) \left(\frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2} - \frac{1}{(x + x_0)^2 + y_0^2} \right) dx \\ &+ \frac{x_0}{\pi} \int_0^\infty g(y) \left(\frac{1}{x_0^2 + (y - y_0)^2} - \frac{1}{x_0^2 + (y + y_0)^2} \right) dy. \end{aligned}$$