Lista 20 MAT-206 e MAP-216

Alguns resultados sobre séries de potências:

Considere a série $\sum_{i\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ e seja I o seu intervalo de convergência. Então fica definida a função $f(x)=\sum_{n\geq 1} a_n(x-x_0)^n$, $\forall\ x\in I$.

(a) f é contínua no intervalo I e a convergência da série é uniforme em qualquer intervalo fechado contido em I.

(b) Dados $a,b\in I$, com $a<b$, vale que $\int_a^b f(x)dx=\sum_{n\geq 0}\int_a^b a_n(x-x_0)^n dx$.

(c) Para todo $x\in I$, $f'(x)=\sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$

(d) $\sum_{n\geq 0} q^n=\dfrac{1}{1-q}$, se $|q|<1$.

(I) Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n^2}{2^n}(x-1)^n$

(b) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n3^n}(x-5)^n$

(c) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(x+1)^n}{(n+1)ln^2(n+1)}$

(d) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{10^n}{(2n)!}(x-6)^n$

(e) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n!}{n^n}(x-2)^n$

(II) Usando integração e derivação termo a termo, calcule a soma das séries e seu intervalo de convergência.

(1) $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{n}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}+\ldots$

(2) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{n} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + \ldots$
Usando o resultado obtido, escreva $ln2$ como uma série num'erica.

(3) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

(4) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$
Utilizando o resultado obtido, escreva o número π como soma de uma série numérica.

(5) $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$

(6) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$

(7) $\dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} - \dfrac{x^5}{4.5} + \ldots$

(III) Determine a expansão em série de Taylor das seguintes funções em torno de $x_0 = 0$. Determine o intervalo de convergência das séries encontradas.

(a) $f(x) = x^2 e^x$

(b) $f(x) = cos\sqrt{x}$

(c) $f(x) = sen(x^2)$

(d) $f(x) = cos^2 x$

(e) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$