

## 1 Objetivos

O presente projeto tem como objetivos principais:

- Formular um modelo matemático de parâmetros concentrados de um determinado sistema mecânico a partir de dados experimentais oriundos de ensaios realizados com um protótipo do sistema em estudo;
- Familiarizar-se com dados experimentais no domínio do tempo e da frequência, através da manipulação dos dados dos ensaios do protótipo em estudo;
- Simular a resposta do modelo matemático formulado e compará-la com os respectivos resultados experimentais;

Ao final do projeto, espera-se que o estudante adquira as seguintes competências: (i) Aprimoramento da capacidade de formular modelos matemáticos de parâmetros concentrados de um determinado sistema em estudo; (ii) Familiaridade na manipulação de dados experimentais; (iii) Compreensão da importância em se validar modelos matemáticos a partir de resultados experimentais.

## 2 O Problema

O problema a ser estudado neste projeto está diretamente relacionado ao modelo teórico mostrado na Figura 1a, o qual representa uma viga metálica engastada na extremidade  $x = 0$  e com uma massa concentrada  $M$  presa à sua extremidade livre em  $x = L$ , onde  $x$  representa o eixo longitudinal paralelo à linha neutra da viga e  $L$  o comprimento da viga. O modelo mostrado na Figura 1a é comumente denominado *viga cantilever* na bibliografia de sistemas dinâmicos e análise estrutural.

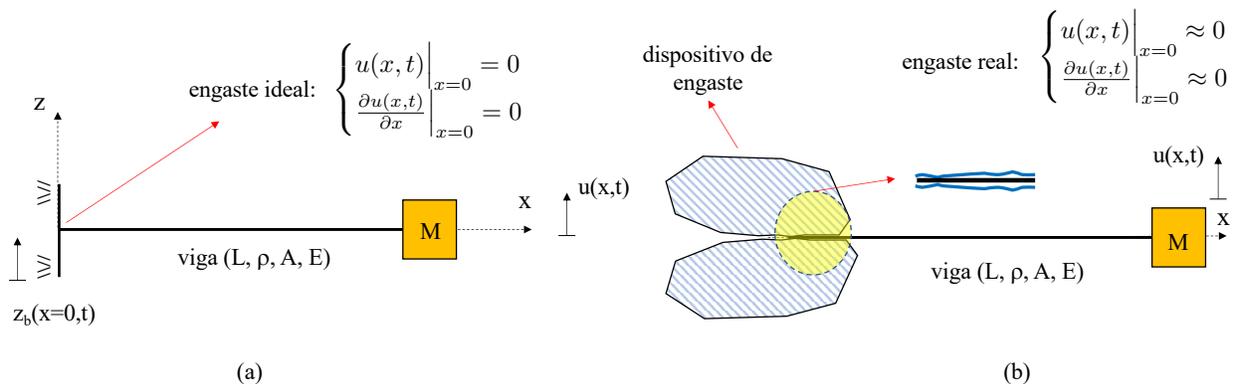


Figura 1: Montagem do sistema a ser estudado: (a) Vista lateral; (b) Vista frontal; (c) Vista superior; (d) Detalhes da geometria da secção transversal da viga

Este modelo é muito utilizado em vários estudos teóricos na área de sistemas dinâmicos. Da teoria de mecânica dos sólidos, já estudada, o termo *engastada* refere-se à condição na qual tanto o deslocamento vertical  $u(x,t)$  quanto o giro (ângulo) da viga  $\frac{\partial u}{\partial x}$  são nulos em  $x = 0$ . Essas duas condições cinemáticas são denominadas *condições de contorno* do sistema, pois se aplicam à sua fronteira. Isto significa que, para este ponto a viga não sofre qualquer movimento vertical ou angular, independentemente do carregamento que a ela seja aplicado. Para o caso mostrado na Figura

1a, onde um deslocamento vertical  $z_b(x = 0, t)$  é aplicado como entrada na base do sistema, é claro que a viga sofrerá o mesmo movimento imposto à sua base em  $x = 0$ , pois afinal, se a fronteira do sistema se movimentar e o sistema é rigidamente preso à fronteira, logo a viga também se movimentará. No entanto, a condição de deslocamento e giro nulos ainda prevalece, mesmo quando a entrada é dada pelo deslocamento imposto à base da viga, pois neste caso o problema pode ser tratado em termos do deslocamento relativo da viga em relação à base. E portanto, as condições de contorno acima mencionadas e mostradas na Figura 1a ainda continuam válidas.

Ocorre que, na prática da engenharia, a condição de contorno que impõe a nulidade do deslocamento vertical e giro à raiz da viga é impossível de ser atingida visto que, por mais rígido que seja o material usado para suportar a viga na região do engaste, e por melhor que seja a qualidade das superfícies de contato na região do engaste sempre existirá um deslocamento resultante, linear e angular, por mais pequeno que seja na região do engaste. Logo, a condição cantilever (zero deslocamento e giro no engaste) é na verdade uma condição ideal, é um modelo teórico. E, aproximar-se desta condição depende de vários fatores, dos quais os mais importantes seriam: (i) Geometria da região de engaste; (ii) Material da região do engaste. Em situações práticas, onde se exige que as peças a serem testadas sejam engastadas, busca-se como solução projetar e construir um dispositivo de engaste, com características de geometria e material particulares. Na Figura 1b é mostrada uma situação onde a viga é "engastada" por meio de um dispositivo de fixação. E daí podem surgir inúmeros fatores que alteram a condição de engaste, conforme já mencionado, tornando-o não ideal.

Com o objetivo de estudar o problema da viga *cantilever*, propõe-se aqui uma montagem cuja representação está mostrada na Figura 2. A Figura 2a mostra uma vista lateral do sistema e estudo. No caso, uma viga de aço é montada em um dispositivo de fixação composto de dois blocos de alumínio. A viga é então "sanduichada" pelos dois blocos através de quatro parafusos que atravessam o bloco superior, visto da Figura 2a através furos passantes (sem roscas) e posteriormente rosqueados no bloco inferior. Como se observa na Figura 2a, um parafuso é alojado no bloco inferior para fins de conexão com um excitador eletromagnético de vibrações (comumente denominado *shaker*), que por sua vez será responsável pela aplicação de uma entrada ao conjunto de blocos e, conseqüentemente à viga de aço que compõe parte do sistema. Observa-se na Figura 2a que na extremidade livre da viga são fixadas duas massas concentradas, uma na superfície superior e a outra na inferior, respectivamente. A Figura 2b, que mostra a vista frontal do experimento, mostra detalhes da fixação das massas concentradas na extremidade livre da viga. Essencialmente as massas concentradas são dois blocos de largura  $a$ , superior à largura  $b_v$  da viga. A união de dá através de dois parafusos que atravessam a massa concentrada superior, sendo posteriormente rosqueados na massa concentrada inferior. A Figura 2c é uma vista superior do experimento, onde se pode ver detalhes adicionais da montagem das massas concentradas à extremidade livre da viga. Já a Figura 2d mostra detalhes da geometria da seção transversal da viga utilizada.

Conforme já apontado nos objetivos do projeto, a execução do mesmo será realizada com o apoio de dados experimentais que foram realizados num protótipo que segue a montagem mostrada na Figura 2. Na Figura 3 são mostradas duas imagens dos ensaios realizados. Na Figura 3a é mostrada a montagem experimental para a realização do ensaio com o *shaker*. Neste caso o conjunto viga e dispositivo de engaste é montado na mesa vibratória do *shaker* e o conjunto recebe um estímulo através de um sinal elétrico enviado ao *shaker*. Os acelerômetros montados na extremidade livre da viga (sobre uma das massas concentradas) e no dispositivo de fixação medem as acelerações de saída  $a_o(t)$  e entrada  $a_i(t)$ , respectivamente. A partir destes sinais de entrada e saída, o analisador calcula a *função de resposta em frequência*  $H(\omega)$  dos sinais medidos, que, de acordo com as aulas

teóricas, é calculada a partir da *função transferência* do sistema com as mesmas variáveis de entrada e saída, bastando fazer  $s = i\omega$ . Desta forma a *função de resposta em frequência* neste caso é dada por

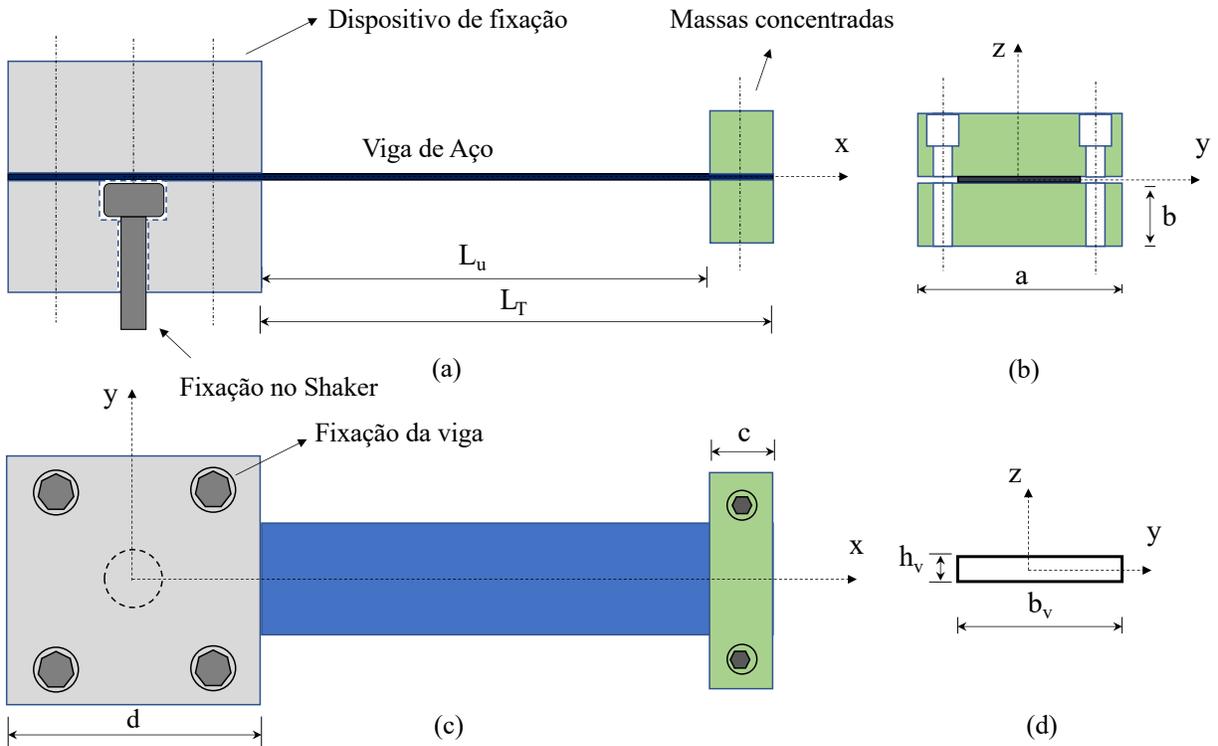


Figura 2: Montagem do sistema a ser estudado: (a) Vista lateral; (b) Vista frontal; (c) Vista superior; (d) Detalhes da geometria da secção transversal da viga

$$H(\omega) = \frac{A_o(\omega)}{A_i(\omega)} \quad (1)$$

onde  $A_o(\omega) = A_o(s)$  e  $A_i(\omega) = A_i(s)$  quando se faz  $s = i\omega$ . Logo, a partir deste primeiro ensaio, o dado experimental que será disponibilizado é a função de resposta em frequência definida pela Equação 1. Na Figura 3b é mostrada uma imagem do segundo ensaio realizado. Este ensaio consiste em aplicar um deslocamento inicial à extremidade da viga (que pode ser medido pela escala mostrada na figura) e então liberar a viga subitamente. Se a viga é deslocada quase estaticamente até uma determinada posição e então liberada, pode-se dizer que uma condição inicial de deslocamento não nulo e velocidade nula é aplicada ao sistema. O movimento resultante é então medido com acelerômetro, sendo portanto um sinal de aceleração e, posteriormente gravado. Logo, o dado experimental que será fornecido deste ensaio é a aceleração da extremidade livre da viga no domínio do tempo. Serão realizadas duas medições, em dois intervalos de tempo distintos.

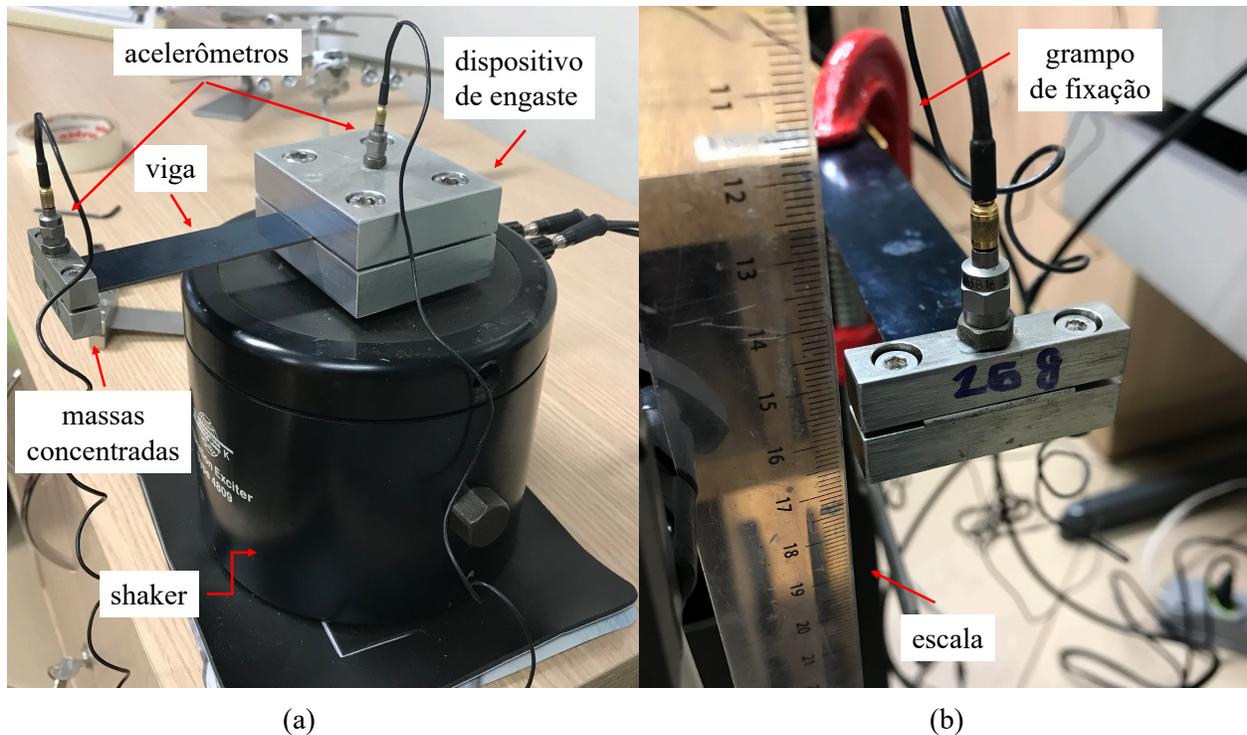


Figura 3: Ensaio experimental: (a) Ensaio com entrada via base através do shaker; (b) Montagem para ensaio de condições iniciais

Levando-se em conta o texto acima, as demandas para este mini-projeto seriam:

(a) Formule um modelo matemático para o sistema mostrado na Figura 2, no qual uma viga metálica é engastada numa extremidade e possui massas concentradas fixas à outra extremidade. Seu modelo deve considerar uma entrada deslocamento imposta à base da viga e como saída o deslocamento da extremidade livre, onde se encontram as massas concentradas. Este modelo deve ser literal num primeiro momento, mas você pode (deve) usar os dados experimentais fornecidos para calcular as propriedades de seu modelo, pois mais a frente você será solicitado a comparar resultados de seu modelo com os respectivos resultados experimentais.

(b) Adapte seu modelo para obter a função transferência que relaciona a aceleração da extremidade livre da viga com a aceleração decorrente do deslocamento imposto à base do sistema.

(c) Determine analiticamente a aceleração da extremidade da viga de seu modelo para uma condição inicial qualquer no deslocamento, porém nula na velocidade. Compare graficamente seu resultado com os resultados experimentais fornecidos.

(d) A partir do resultado encontrado no item (b) faça o gráfico da função de resposta em frequência de aceleração da extremidade livre por aceleração da base e compare com o resultado experimental fornecido.

(e) Discuta os resultados obtidos para seu modelo, procurando explicar as eventuais diferenças observadas.

(f) Proponha, quando couber, melhorias em seu modelo de tal forma a existir melhor correlação entre os dados de seu modelo e os correspondentes dados experimentais.

### 3 Dados Numéricos e Experimentais

Para a execução do projeto você terá a sua disposição dados experimentais compostos de:

- Experimento 1: arquivos denominados **frequencia\_frf.txt** (arquivo formato texto ascii) e **frequencia\_frf.mat** para o Matlab.
- Experimento 2: arquivos denominados **tempo\_arquivo1.txt** e **tempo\_arquivo1.mat** para a primeira medição e **tempo\_arquivo2.txt** e **tempo\_arquivo2.mat** para a segunda medição.

Além dos dados experimentais, segue abaixo outros dados indispensáveis para a execução do projeto:

- Geometria da Viga:  $L_v = 127 \times b_v = 25 \times h_v = 0,65 \text{ mm}$  (comprimento  $\times$  largura  $\times$  espessura). O comprimento dado é o total, incluindo as partes cobertas pelo dispositivo de engaste e pela massa concentrada na extremidade livre. Largura do dispositivo de engaste (conforme Figura 2c:  $d = 61 \text{ mm}$ )
- Material da Viga: Aço mola. Propriedades nominais:  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$
- Massa da viga:  $m_v = 16 \text{ g}$ . A massa da viga corresponde à massa total, ou seja correspondendo ao comprimento  $L_v$ .
- Geometria das massas da extremidade: Conforme Figura 4:  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$ ,  $c = 10 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $d_3 = 3,5 \text{ mm}$ ,  $d_4 = 5 \text{ mm}$ . Obs: A dimensão  $c$  está mostrada na Figura 2c.

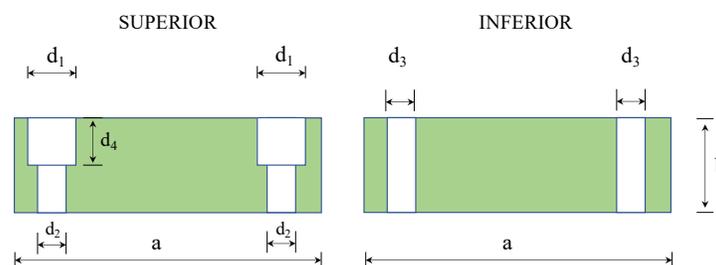


Figura 4: Ensaio experimental: (a) Ensaio com entrada via base através do shaker; (b) Montagem para ensaio de condições iniciais

- Massa das massas concentradas: Superior:  $27 \text{ g}$ , Inferior:  $30 \text{ g}$ . Material: aço comum
- Massa dos parafusos de conexão das massas concentradas:  $2 \text{ g}$  (cada)
- Massa dos acelerômetros usados nas medições:  $2 \text{ g}$  (cada)

-Orientações: (i) Horário limite para submissão das soluções: 17:59 hs do dia 14/07/2023, exclusivamente pelo sistema e-disciplinas; (ii) Pode ser realizado em grupo de até 04 alunos por grupo; (iii) Em hipótese alguma serão aceitas submissões através de formas que não seja o e-disciplinas bem como fora do horário estabelecido; (iv) Submissão na forma de arquivo .pdf; (v) Não esquecer de colocar nome e Nro USP de todos os participantes do grupo; (vi) A submissão no e-disciplinas deve ser feita por apenas um dos membros do grupo

(i) A implementação numérica das soluções deve obrigatoriamente ser feita utilizando alguma ferramenta computacional; (ii) Cópia das rotinas desenvolvidas obrigatoriamente deverão constar em seu relatório do mini-projeto

A execução e conseqüente submissão do relatório e demais materiais do presente projeto é de natureza **OPCIONAL**, ou seja, não obrigatória. Conforme explicado em aula, a determinação das médias finais será realizada de acordo com o critério estabelecido no início do semestre letivo. A nota deste projeto, para os estudantes que decidam por desenvolvê-lo será adicionada à média final em até 2,0 pontos !