MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

LISTA 4 PARA ENTREGAR

Instruções

1. Fazer em grupos de até 4 pessoas.
2. Prazo de entrega é até 23 de junho.
3. Escrever seus nomes completos com seu número usp nos trabalhos.
4. Enviar os trabalhos por e-Disciplinas em arquivos pdf.
5. Justifique todas as suas afirmações. Bom trabalho!

Questão 1 (2.0 pts) Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$

(a) Prove que $f(1)$ é o valor máximo de f.

(b) Prove que existe $x_1 \in (-1,0)$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f.

Questão 2 (2.0 pts) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários)

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$

Questão 3 (2.0 pts) Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

(a) $f(x) = \ln x$, $[1,4]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[1,3]$

Questão 4 (3.0 pts) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente, os valores máximos ou mínimos locais, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Use estas informações para esboçar o gráfico.

(a) $C(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$

(b) $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Q1 (a) Observamos que, para todo $x \in [0,1]$ temos

$$x^2+x \leq x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1.$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 1 \ ; \ \forall x \in [0,1].$$

Além disso, para valores $x \in]-1,0[$ temos que

$$x^2+x < 0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{x^2+1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) < 0 \ , \forall x \in]-1,0[.$$

Como $f(0) = f(-1) = 0$, temos que

$$f(x) \leq 1 = f(1) \ ; \ \forall x \in [-1,1].$$

Portanto $f(1) = 1$ é o valor máximo de f.

(b) f é contínua em $[-1,1]$ (pois $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; $\forall a \in [-1,1]$) pelo teorema de Weirstrass existem x_1 e x_2 em $[-1,1]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ , \ \forall x \in [-1,1]$$

ou seja f assume o valor mínimo em x_1.

Da parte (a) temos

$$f(x) \geq 0 \ ; \ x \in [0,1]$$

$$f(x) < 0 \ , \ x \in]-1,0[$$

e também $f(0) = f(-1) = 0$.

Então o valor mínimo de f deverá ser assumido em $]-1,0[$, ou seja $x_1 \in]-1,0[$.

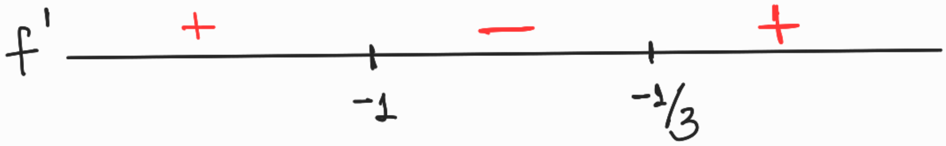
Portanto existe $x_1 \in]-1,0[$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[-1,1]$.

Q2 (a) $f(x) = x^3+2x^2+x+1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+4x+1$

Logo. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+4x+1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)(x+1/3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -1/3$$

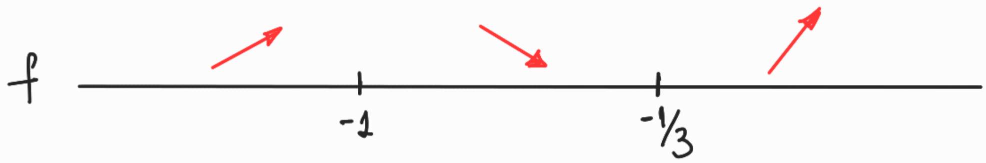
Então



Temos: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{nos intervalos }]-\infty, -1[\text{ e }]-1/3, +\infty[\\ f'(x) < 0 & \text{no intervalo }]-1, -1/3[. \end{cases}$

Então desde que f é contínua (é polinômio) segue:

$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty,-1[\text{ e }]-1/3,+\infty[. \\ f \text{ é estritamente decrescente em }]-1,-1/3[. \end{cases}$



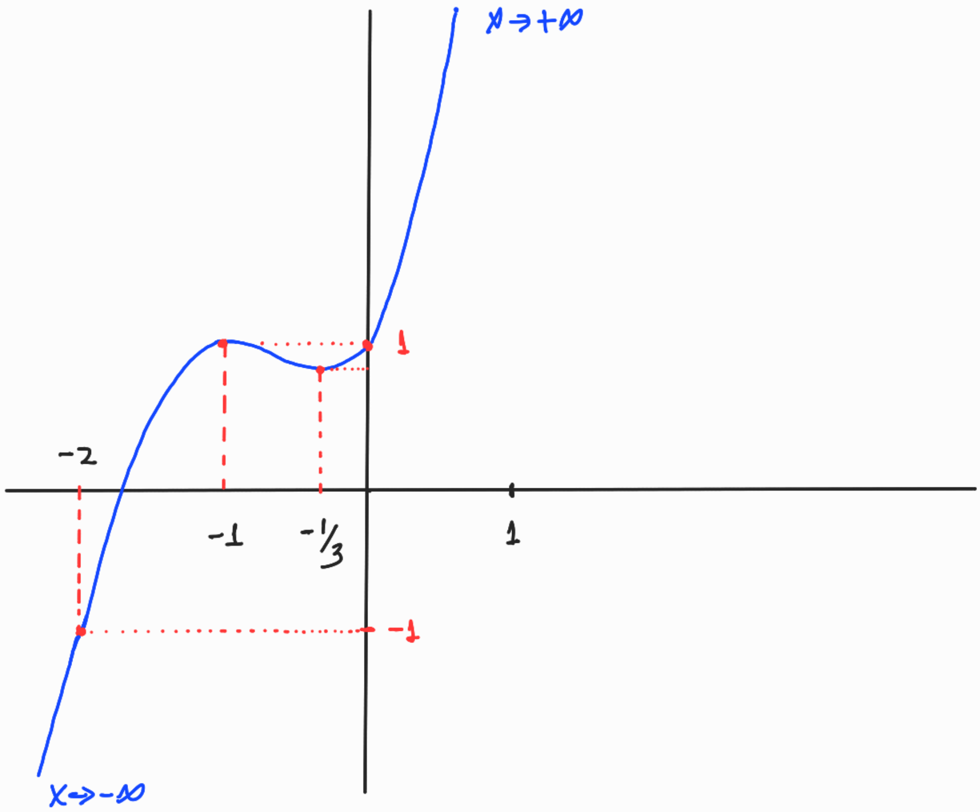
Além disso calculamos os seguintes limites para observar que acontece com f quando $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+2x^2+x+1) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+2x^2+x+1) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

Para esboçar o gráfico de f calculamos alguns valores.

x	$f(x)$
-2	-1
-1	1
$-1/3$	$0,85$
0	1
1	5

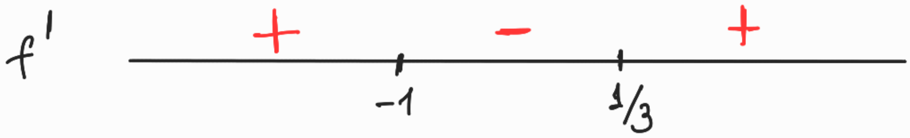


(b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{1+3x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x-1)(1+3x^2) - 6x(x^2-x)}{(1+3x^2)^2} = \dfrac{3x^2+2x-1}{(1+3x^2)^2}$

Observamos $1+3x^2>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ logo:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$

Logo

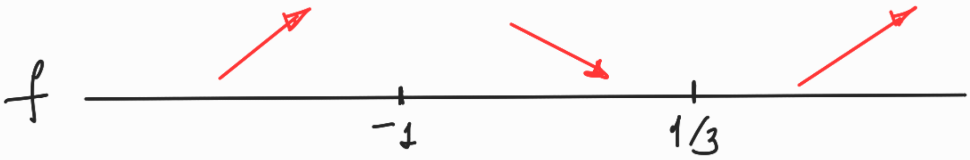


$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{em }]-\infty, -1[\text{ e }]1/3, -\infty[\\ f'(x) < 0 & \text{em }]-1, 1/3[\end{cases}$$

logo

$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty,-1[\text{ e }]1/3,-\infty[\\ f \text{ é } \quad " \quad \text{decrescente em }]-1, 1/3[. \end{cases}$

ou seja



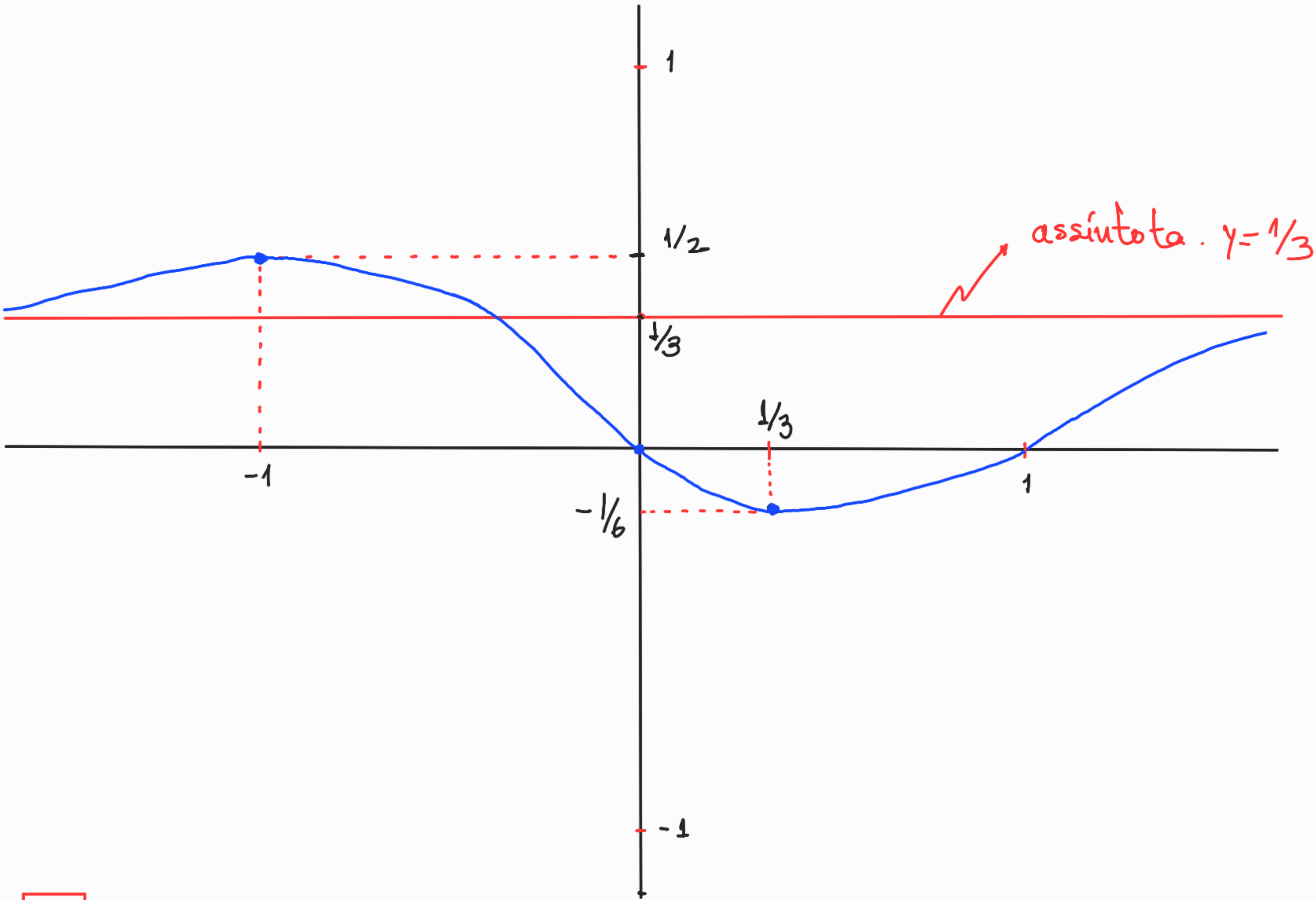
Calculamos os limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{1+3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x^2(3+1/x^2)} = \frac{1}{3}$$ (Assíntota)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x^2(3+1/x^2)} = \frac{1}{3}.$$ (Assíntota)

Calculamos alguns valores:

x	$f(x)$
-2	$0{,}46$
-1	$1/2$
0	0
$1/3$	$-1/6$
1	0



$\boxed{Q3}$

(a) $f(x) = \ln x \quad ; \quad x \in [1, 4]$

Sabemos que ln é contínua e diferenciável no intervalo $(0, \infty)$, então $f(x) = \ln x$ é contínua em $[1,4]$ e diferenciável em $]1,4[$, logo são satisfeitas as condições do teorema do valor médio, então existe $c \in]1,4[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln 4 - \ln 1}{3} = \frac{\ln 4}{3}$$

$$\Rightarrow c = 3/\ln 4 \approx 2,16 \in]1,4[.$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1,3]$.

$\frac{1}{x}$ é contínua e diferenciável em $]-\infty, 0[\cup]0,+\infty[$.
então $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínuo em $[1,3]$ e diferenciável em $]1,3[$, satisfazendo as condições do T.V.M., logo existe $c \in]1,3[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad c = -\sqrt{3}.$$

Portanto só $c = \sqrt{3} \in]1,3[$.

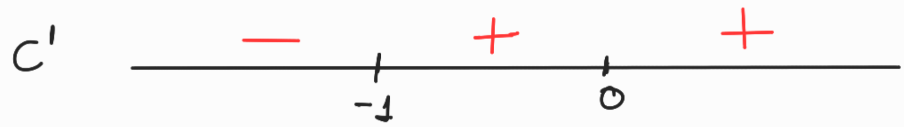
$\boxed{Q4}$.

(a) (*) $C(x) = x^{1/3}(x+4) = x^{4/3} + 4x^{1/3} \Rightarrow C'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$)

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) = \frac{4}{3}\cdot\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

logo $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; o outro ponto crítico é $x = 0$

Assim:



$$\Rightarrow \begin{cases} C'(x) > 0 & \text{em }]-1, +\infty[\\ C'(x) < 0 & \text{em }]-\infty, -1[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \text{ é estritamente crescente em }]-1,+\infty[\\ C \text{ é } \quad \text{"} \quad \text{decrescente em }]-\infty,-1[. \end{cases}$$

(*) Como C' muda de negativo para positivo no ponto -1 então pelo teste da primeira derivada, f tem um mínimo local em -1. Então $C(-1) = (-1)^{1/3}.(-1+4) = -3$ é um valor mínimo local.

[illegible]) $C''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} - \frac{8}{9}x^{-5/3} = \frac{4}{9}x^{-5/3}.(x-2) = \frac{4}{9}.\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{x^5}}.$

$C''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ e $C''(x)$ não existe em $x = 0$.

Logo

C''	$]-\infty,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,+\infty[$
	+		−		+

$\Rightarrow \begin{cases} C''(x) > 0 & \text{em }]-\infty,0[\text{ e em }]2,+\infty[\\ C''(x) < 0 & \text{em }]0,2[. \end{cases}$

$\Rightarrow$ { o gráfico de C é côncavo para cima em $]-\infty,0[$ e $]2,+\infty[$.
o gráfico de C é " para baixo em $]0,2[$.

Observamos $C(0) = 0$ e $C(2) = 2^{1/3}(2+4) = 7,56$.

Logo os pontos de inflexão são $(0,0)$ e $(2, 7,56)$.

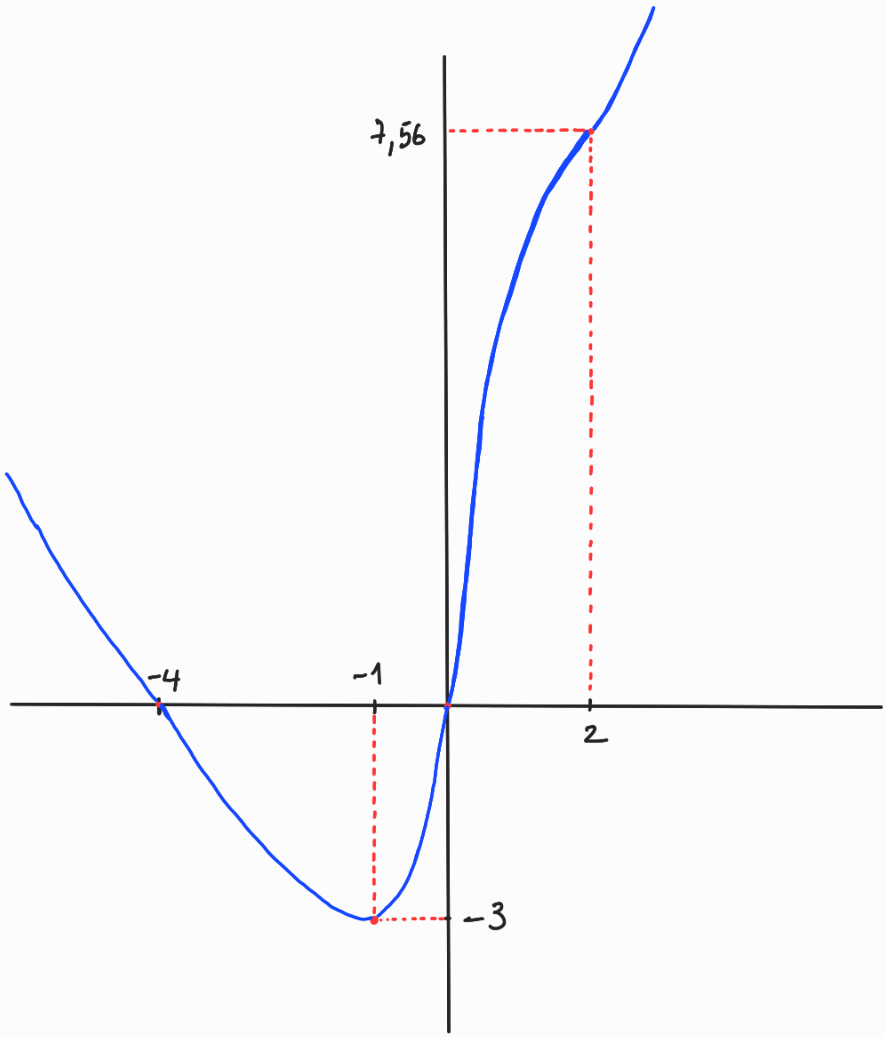
Por outro lado

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{1/3}(x+4) = \lim_{x\to+\infty} x^{4/3}.(1+4/x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{1/3}(x+4) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^4}.(1+4/x) = +\infty$$

Alem disso temos alguns valores

x	$f(x)$
-4	0
-1	-3
0	0
2	7,56



(b) (*) $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\Rightarrow f'(\theta) = -2\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\cos\theta.(-\mathrm{sen}\,\theta) = -2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(1+\cos\theta)$.

Logo $f'(\theta) = 0 \iff -2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(1+\cos\theta) = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = 0$ ou $\cos\theta = -1$

$\iff \theta = 0, \pi, 2\pi$.

f'	0	$-$	π	$+$	2π

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{em }]0, \pi[\\ f'(x) > 0 & \text{em }]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é estritamente decrescente em }]0,\pi[\\ f \text{ é estritamente crescente em }]\pi, 2\pi[\end{cases}$

(*) Como f' muda de negativo para positivo no ponto π, então pelo teste da primeira derivada f tem um mínimo local em π.

Então $f(\pi) = 2\cos\pi + \cos^2\pi = 2(-1)+1 = -1$. é um valor mínimo local.

(*) $f''(\theta) = -2\cos\theta.(1+\cos\theta) - 2\,\text{sen}\theta\,(-\text{sen}\theta)$

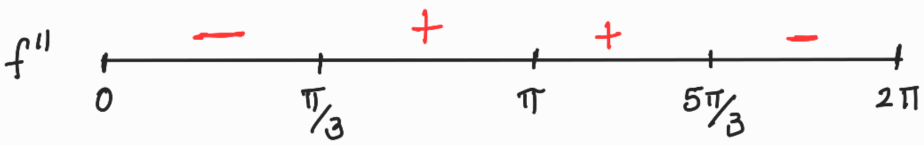
$= -2\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta$

$= -2\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2(1-\cos^2\theta) = -2\cos\theta - 4\cos^2\theta + 2$

$= -2\left(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\right) = -2\,(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$.

$f''(\theta) = 0 \Leftrightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ ou $\cos\theta = -1$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{3}$ ou $\theta = \pi$.



$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \text{ em }]0, \pi/3[\text{ e em }]5\pi/3, 2\pi[. \\ f''(x) > 0 \text{ em }]\pi/3, 5\pi/3[\end{cases}$

$\Rightarrow$ O gráfico de f é côncava para baixo em $]0, \pi/3[$ e $]5\pi/3, 2\pi[$
O gráfico de f é côncava para cima em $]\pi/3, 5\pi/3[$

Observamos $f(\pi/3) = f(5\pi/3) = 5/4$, $f(\pi) = -1$, logo os pontos de inflexão são $(\pi/3, 5/4)$ e $(5\pi/3, 5/4)$.

x	$f(x)$
0	3
$\pi/3$	$5/4$
π	-1
$5\pi/3$	$5/4$
2π	3