ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
PNV-5761 Programação Matemática Aplicada a Problemas de Transporte

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS

PROF. DR. MARCO ANTONIO BRINATI

1. Introdução

Estas notas informais têm a finalidade de documentar e, em alguns aspectos, complementar a exposição feita em sala sobre o emprego de modelagem matemática em problemas de otimização de sistemas.

Inicialmente mostra-se, de forma esquemática, como a construção de um modelo matemático se encaixa dentro de um estudo de pesquisa operacional. Em particular, procuram-se destacar os aspectos principais envolvidos no processo de construção do modelo matemático. Estas diretrizes são aplicadas a um conjunto de problemas, apresentados em ordem crescente de dificuldade; os primeiros problemas são exemplos didáticos para a aplicação das diretrizes propostas e representam situações hipotéticas ou mesmo irreais, enquanto que os últimos já são problemas relevantes.

2. As Fases de um estudo de Pesquisa Operacional

A) <u>Formulação do Problema:</u>

- Identificação do(s) objetivo(s) apropriado(s);
- Determinação das restrições;
- Identificação de todas as alternativas.

B) <u>Construção do Modelo:</u>

- O modelo deve abstrair os elementos essenciais do problema real;
- Compromisso entre a qualidade do modelo e a facilidade de obter solução;
- Um modelo matemático permite entender melhor a estrutura geral do problema, identificando as relações de causa e efeito e indicando dados adicionais que são relevantes para a análise. Além disso, forma uma ponte para a utilização de técnicas matemáticas e de computação com o intuito de resolver o problema.

C) <u>Determinação de uma Solução:</u>

Uma vez construído o modelo, cabe verificar se há, entre as técnicas conhecidas, alguma que permita obter uma solução para o modelo. Caso não exista, deverá ser desenvolvido um procedimento para a solução do modelo (ou se contentar com uma solução aproximada).

D) <u>Teste do Modelo e da Solução:</u>

O critério adequado para avaliar um modelo e sua solução é verificar se ele consegue predizer, com suficiente precisão, os efeitos relativos de diferentes alternativas.

E) <u>Estabelecimento de Controles sobre a Solução:</u>

Se um modelo, depois de aprovado, vai ser utilizado repetidamente, é necessário verificar se seus parâmetros não se alteram. Se isto ocorrer, então a solução pode se alterar. Para manter um controle sobre a solução é necessário, utilizando a técnica de análise de sensibilidade, identificar aqueles parâmetros cuja variação afeta significativamente a solução.

F) <u>Implementação da Solução Final:</u>

A fase final de um estudo de pesquisa operacional é a implementação da solução final aprovada por aquele a quem compete a decisão (Decision Maker).

Esta é uma fase crítica, pois é aqui, e somente aqui, que os benefícios do estudo serão colhidos. Por isso, é importante que a equipe de pesquisa operacional participe do lançamento dessa fase, tanto para assegurar que a solução é corretamente traduzida em procedimentos operacionais, como para corrigir qualquer falha até então não descoberta na solução.

As figuras 1 e 2 se destinam a permitir uma melhor compreensão do processo de modelagem. Depois de construído o modelo matemático do sistema em estudo, procura-se obter uma solução ótima do modelo por meio de técnicas matemáticas. Quanto mais complexo for o modelo matemático, mais difícil será obter a solução ótima; em casos de maior complexidade, é necessário abandonar os métodos exatos para busca da solução ótima e recorrer a procedimentos aproximados (heurísticos) na tentativa de obter uma solução viável de boa qualidade. Por outro lado, a simplificação do modelo, para tornar sua resolução mais fácil, pode conduzir a uma solução ótima que, eventualmente, esteja distante da solução ótima do sistema ou sequer seja viável para o sistema.

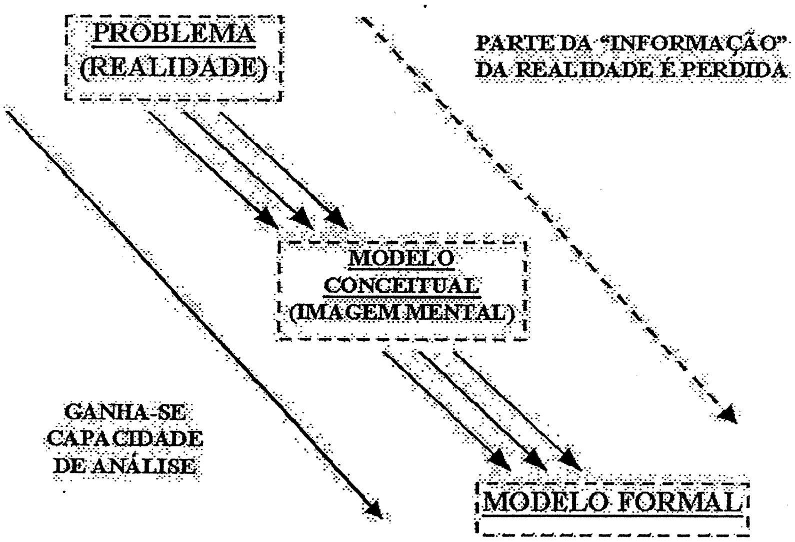

Figura 1 – Visão esquemática do processo de modelagem

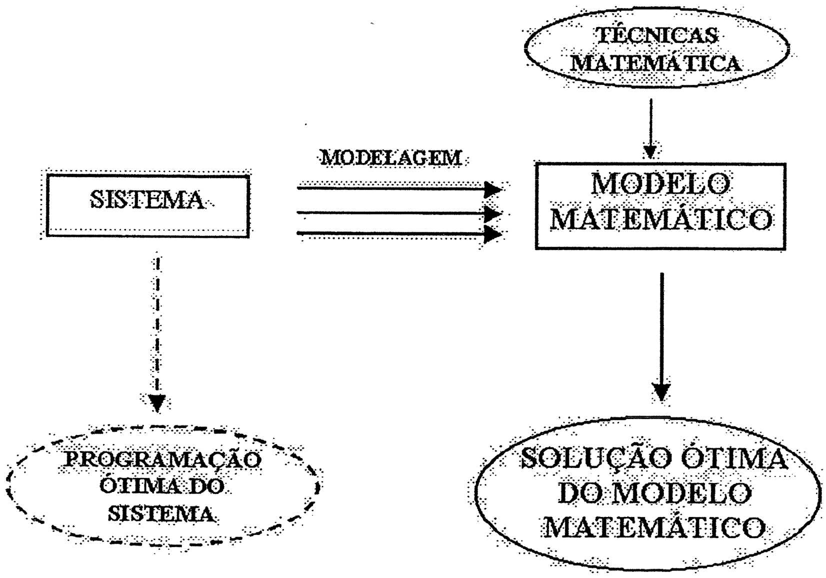

Figura 2 – A busca de uma solução ótima para o sistema via modelagem matemática

3. Diretrizes Básicas para a Construção de um Modelo Matemático em Problemas de Otimização de Sistemas

De acordo com Dantzig, o modelo matemático de um sistema é a coleção de relações matemáticas que um caracterizam as programações (soluções) viáveis do sistema. Entendemos como programações viáveis aquelas que podem ser conduzidas de acordo com as restrições do sistema. A construção de um modelo matemático freqüentemente enseja uma percepção tão clara do sistema e da organização de conhecimento a seu respeito que é considerada, por muitos, mais importante que a tarefa de programação matemática, que vem a seguir.

A confecção de um modelo matemático para o estudo de um problema concreto não é, em geral, uma tarefa trivial. A dificuldade na construção de um modelo provém da riqueza, variedade e, por vezes, ambigüidade do mundo real. Por isto, é necessário, nos problemas mais complexos, muita habilidade e discernimento para isolar apropriadamente os fatores e os vínculos relevantes do problema.

Com o intuito de propiciar uma abordagem sistemática do processo de modelagem de sistemas, são apresentadas, a seguir, algumas diretrizes básicas, aplicadas adiante, a diversos problemas.

a) Identifique as variáveis de decisão do problema

As variáveis de decisão são os elementos cujo conhecimento especifica completamente a solução a ser implementada; a cada variável de decisão deve ser atribuído um símbolo matemático.

b) Identifique a função objetivo e a escreva em termos das variáveis de decisão.

c) Identifique as restrições do problema e as escreva em termos das variáveis de decisão.

Restrições óbvias, mas essenciais, como a não negatividade das variáveis de decisão, não podem ser esquecidas.
(Pode haver a necessidade de repetir as etapas de a, b e c)

4. Alguns Exemplos de Modelos e sua Construção

4.1. Seleção das Atividades de uma Fábrica

$$\text{Recursos}\begin{cases}\text{Matéria - prima 1}\\ \text{Matéria - prima 2}\\ \text{Mão de obra e equipamentos}\end{cases}$$

$$\text{Atividades}\begin{cases}\text{Fabricar produto 1}\\ \text{Fabricar produto 2}\\ \text{Fabricar produto 3}\\ \text{Fabricar produto 4}\end{cases}$$

Tecnologia de fabricação:

Quantidade da matéria-prima necessária para a fabricação de uma unidade do produto j:

Tabela 1 - Quantidade necessária da matéria-prima i para fabricar uma unidade do produto j ; $i = 1, 2$; $j = 1, \ldots, 4$

PRODUTO / MATÉRIA-PRIMA	1	2	3	4
1	1	5	10	2
2	4	1	3	8

- Quantidades disponíveis de recursos:

  - 80.000 unidades da matéria-prima 1
  - 100.000 unidades da matéria-prima 2

- mão de obra e equipamentos disponíveis permitem fabricar 12.000 unidades do produto 1, ou 15.000 unidades do produto 2, ou 20.000 unidades do produto 3 ou 10.000 unidades do produto 4.

$$\text{Retornos}\begin{cases}\text{Lucro unitário do produto } 1=4\\ \text{Lucro unitário do produto } 2=3\\ \text{Lucro unitário do produto } 3=8\\ \text{Lucro unitário do produto } 4=6\end{cases}$$

<u>Modelo Matemático para o Exemplo 4.1</u>:

a) Variáveis de decisão:

Quantidade a ser fabricada do produto j, x_j , j = 1, 2, 3, 4.

b) Função objetivo:

Lucro da empresa L, a ser maximizado:

$$\text{Máx } L = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4$$

c) Restrições:

i) Não consumir na fabricação uma quantidade de insumos maior que a disponível.

Matéria-prima 1: $x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 \leq 80.000$

Matéria-prima 2: $4x_1 + x_2 + 3x_3 + 8\,x_4 \leq 100.000$;

Mão de obra e equipamentos:

$$\frac{x_1}{12.000} + \frac{x_2}{15.000} + \frac{x_3}{20.000} + \frac{x_4}{10.000} \leq 1$$

ou $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 60.000$;

ii) não negatividade das quantidades fabricadas;

$x_j \geq 0, j = 1, ..., 4$.

4.2. Problema da Dieta

Uma dona de casa de classe média, preocupada com a alimentação de sua família e com a deterioração do poder aquisitivo do salário de seu marido, resolveu estabelecer uma dieta alimentar satisfatória a um custo mínimo. Para tanto, consultou uma nutricionista e fez uma coleta de preços médios em supermercados. As informações da nutricionista e os resultados da coleta de preços estão condensados na tabela abaixo:

Conteúdo e custo por kg de produto						
Alimento / Item	Pão	Carne	Batatas	Legumes	Leite	Quantidade requerida por dia
Calorias	2750	3250	705	100	690	3000 UI
Proteínas	85	165	18	9	35	70 g
Cálcio	920	90	95	310	1180	800 mg
Vitamina A	-	-	160	1900	1600	500 UI
Custo Cr$/kg	90	350	50	60	50	

Elabore o modelo matemático que atenda as necessidades da dona de casa.

<u>Resolução do Problema da Dieta</u>:

a) Variáveis de Decisão:

Quantidade a ser consumida diariamente do alimento j, x_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, adotando índice 1 para o pão, 2 para a carne, ..., 5 para o leite.

b) Função Objetivo:

Custo diário da alimentação, C, a ser minimizado.

Minimizar C

$C = 90x_1 + 350x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 50\,x_5$;

c) Restrições:

i) Atender os requisitos diários dos nutrientes:

<u>Calorias</u>: $2750x_1 + 3250x_2 + 750x_3 + 100x_4 + 690\,x_5 \geq 3.000$

<u>Proteínas</u>: $85x_1 + 165x_2 + 18x_3 + 9x_4 + 35x_5 \geq 70$

<u>Cálcio</u>: $920x_1 + 90x_2 + 95x_3 + 310x_4 + 1180x_5 \geq 800$

<u>Vitamina A</u>: $160x_3 + 1900x_4 + 1600x_5 \geq 500$

ii) não negatividade das quantidades consumidas

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$; $x_5 \geq 0$.

4.3. Problema de Transporte

Uma empresa possui três unidades industriais em diferentes regiões e coloca o seu produto em quatro centros consumidores. Existe um equilíbrio entre oferta e demanda, sendo as ofertas e demandas individuais apresentadas nas tabelas seguintes:

Tabela 2 – Oferta das unidades industriais

Unidade industrial	Oferta
1	17
2	12
3	10

Tabela 3 – Demanda nos centros consumidores

Centro Consumidor	Demanda
b1	9
b2	5
b3	8
b4	17

O custo unitário de produção em cada fábrica, o preço unitário de revenda em cada centro consumidor e os custos unitários de transporte (que correm por conta da empresa em estudo) são dados nas tabelas abaixo:

Tabela 4 – Custo unitário de produção

Unidade Industrial	Custo
1	50
2	45
3	54

Tabela 5 – Preço de venda nos centros

Centro Consumidor	Preço de Venda
1	65
2	60
3	58
4	62

Tabela 6 – Custo de transporte entre unidade industrial i e consumidor j

i \ j	1	2	3	4
1	6	3	5	8
2	7	6	4	6
3	3	5	3	4

I) Determinar a forma em que se processa o transporte entre as unidades industriais e os centros consumidores.

II) Este equilíbrio entre oferta e demanda foi conseguido ao longo de um processo de competição pelo mercado. A empresa sabe que, devido à agressividade de outras empresas concorrentes, ela poderá perder uma fatia do mercado se não conseguir fornecer produto de boa qualidade e de maneira regular. Admita que, em face de acidente na fábrica 1, a produção caia para 7. Se a empresa estima que o impacto sobre as vendas futuras pode ser medido através de uma penalidade p_j, por uma unidade de demanda não atendida, qual será o novo esquema de distribuição? Os valores de p_j são 4, 7, 3 e 2, respectivamente.

Resolução do Problema 4.3:

Antes de tudo, vamos atribuir símbolos aos parâmetros deste problema:

- a_i – oferta da unidade industrial i, i = 1, 2, 3;
- b_j – demanda no centro consumidor j, j = 1, 2, 3, 4;
- cp_i – custo unitário de produção na unidade industrial i, i = 1, 2, 3;
- pv_j – preço de venda no centro consumidor j, j = 1, 2, 3, 4;
- c_{ij} – custo de transporte entre a unidade industrial i e o centro consumidor j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4.

Caso I:

a) Variáveis de decisão:

x_{ij} – Quantidade do produto a ser transportada da unidade industrial i para o centro consumidor j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4.

b) Função objetivo:

Diferença entre a receita de venda dos produtos e a soma dos custos de produção e transporte, a ser maximizada, L.

Maximizar L:

$$L = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \left(pv_j - cp_i - c_{ij} \right) x_{ij}$$

c) Restrições:

i) De oferta na unidade industrial i:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, 3;$$

ii) De demanda no centro consumidor j:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, 3, 4;$$

iii) Não negatividade das variáveis de decisão:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3; \qquad j = 1, 2, 3, 4;$$

Caso II:

Neste caso, haverá mudança na função objetivo e na restrição de demanda.

b) Função objetivo:

Da função objetivo do caso I deve ser subtraída uma parcela correspondente à penalidade por demanda não atendida. Isto é:

$$L' = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \left(pv_j - cp_i - c_{ij} \right) x_{ij} - \sum_{j=1}^{4} p_j \left(d_j - \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \right)$$

4.4. Localização de Centros de Distribuição

Uma empresa possui 3 fábricas de um mesmo produto a partir das quais abastece diretamente seus n consumidores. Um estudo indicou a necessidade de implantação de centros de distribuição como elementos intermediários no escoamento da produção entre as fábricas e os clientes; há m locais candidatos a receber os centros de distribuição.

A empresa opera num mercado com forte concorrência e deve colocar seu produto a um mesmo preço em todos os clientes. Elaborar e resolver um modelo para localização dos centros de distribuição da empresa e definição de forma de abastecimento de clientes, conhecendo as seguintes informações:

a) Demanda anual de cada cliente j, d_j, j = 1, ..., n;
b) Custo unitário de produção na fábrica i, cp_i, i = 1, 2, 3;
c) Capacidade anual de produção da fábrica i, CP_i, i = 1, 2, 3;
d) Custo unitário de transporte entre fábrica i e o eventual centro de distribuição k, ct_{ik}, i = 1, 2, 3, k = 1, ..., m;
e) Custo fixo anual do centro de distribuição k, CF_k, k = 1, ..., m;
f) Custo unitário de manipulação do produto no centro de distribuição k, cm_k, k = 1, ..., m;
g) Capacidade anual de manipulação de produtos no centro de distribuição k, CM_k, k = 1, ..., m;
h) Custo unitário de transporte entre centro de distribuição k e cliente j, cd_{kj}, k = 1, ..., m, j = 1, ..., m.

Os dados do problema são apresentados nas tabelas abaixo.

Demanda dos clientes, em milhares de Unidades															
Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Demanda	120	80	90	140	100	75	125	60	100	130	85	105	160	50	70

Parâmetros Relativos à Fábrica		
Parâmetro / Fábrica	Custo Unitário (R$)	Capacidade Anual de Produção (em milhares)
1	75	600
2	80	450
3	72	700

Parâmetros Relativos aos Centros de Distribuição (C.D.)			
Parâmetros C.D.	Custo Fixo Anual (em 10^6 R$)	Custo Unitário (R$) de Manipulação	Capacidade Anual de Manipulação (em milhares)
1	5500	1,5	600
2	7500	2,0	900
3	6000	1,5	700
4	9200	2,5	1200
5	8000	2,0	1000

Custos Unitários de Transporte entre Fábricas e CDs (R$)					
C.D. Fábrica	1	2	3	4	5
1	10	12	9	11	10
2	8	10	11	9	12
3	9	11	10	8	10

Custos Unitários de Transporte entre CD e Clientes (R$)					
C.D. Clientes	1	2	3	4	5
1	6	9	6	10	9
2	5	7	9	9	8
3	7	6	8	7	10
4	4	8	4	11	12
5	8	7	7	8	6
6	10	4	10	7	7
7	9	3	5	9	5
8	8	5	8	6	8
9	9	2	4	8	4
10	10	7	7	5	9
11	7	8	6	7	7
12	11	7	9	4	10
13	12	9	10	9	7
14	9	9	7	7	8
15	8	10	8	8	8

Solução do problema de localização dos centros de distribuição:

a) Variáveis de decisão:

x_{ik} – quantidade de produto transportado entre a fábrica i e o eventual centro de distribuição k, i = 1, 2, 3; k = 1, .., 5;
y_{kj} – quantidade de produto transportado entre o eventual centro de distribuição k e o cliente j, k = 1, ..., 5; j = 1, .., 5;
z_k – variável de decisão binária tal que:

$$z_k \begin{cases} 1, \text{se o centro de distribuição k for implantado;} \\ 0, \text{em caso contrário} \end{cases}$$

b) Função objetivo:

Soma dos custos de produção, transporte e os devidos aos centros de distribuição, a ser minimizada.

Minimizar CT:

$$CT = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}(cp_i + ct_{ik})x_{ik} + \sum_{k=1}^{5}\left(CF_k z_k + \underset{Cm_k}{C\overset{m}{\cancel{M}}_k} \sum_{j=1}^{15} y_{kj}\right) + \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{15} cd_{kj} y_{kj}$$

c) Restrições:

i) Oferta nas Fábricas:

$$\sum_{k=1}^{5} x_{ik} \le CP_i \qquad \text{i = 1, 2, 3;}$$

ii) De balanço de fluxo nos centros de distribuição:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ik} = \sum_{j=1}^{15} y_{kj} \qquad \text{j = 1, 2, ..., 15;}$$

iii) De demanda nos clientes:

$$\sum_{k=1}^{5} y_{kj} = d_j \qquad j = 1, 2, ..., 15;$$

iv) Vínculo entre as variáveis z_k e y_{kj}:

$$\sum_{j=1}^{15} y_{kj} \leq z_k CM_k \qquad k = 1, ..., 5;$$

Esta restrição, além de garantir que a capacidade do centro de manipulação k não será ultrapassada, faz com que a variável z_k assuma valor 1, quando pelo menos um $y_{kj} > 0$, e o custo fixo do centro de distribuição k seja incluído no cálculo da função objetivo.

v) Não negatividade das variáveis:

$x_{ij} \geq 0$; $y_{kj} \geq 0$;

vi) Variáveis binárias:

$z_k = 0$ ou 1;

4.5. Alocação de uma Frota de Aviões

Uma companhia aérea possui três tipos de aviões e é obrigada a servir quatro rotas aéreas. A tabela abaixo fornece a capacidade máxima (em números de passageiros) de cada tipo de aeronave, o número de aviões disponíveis de cada tipo, bem como o número de viagens por dia que cada tipo de avião pode fazer em uma determinada rota (por exemplo: um avião do tipo 1 pode realizar 3 viagens na rota 1 ou 2 viagens na rota 2, etc.). Na tabela seguinte é dado também o número de passageiros que necessariamente terá que ser transportado em cada rota.

Tipo de Aeronave	Capacidade (passageiros)	Número disponível de Aeronaves	Nº de viagens diárias em cada rota			
			1	2	3	4
1	40	7	3	2	2	1
2	60	8	4	3	3	2
3	100	6	5	4	4	2
Passageiros a serem transportados diariamente em cada rota			650	710	610	950

O custo operacional por viagem para cada avião nas diferentes rotas é dado pela tabela abaixo:

Tipo de Aeronave	Custos Operacionais por Viagem para cada Rota (R$)			
	1	2	3	4
1	1500	1900	2100	2800
2	2100	2600	2800	3700
3	3200	3700	3900	5800

Formular e resolver um modelo de programação linear que permita alocar os aviões às diversas rotas, visando a minimizar o custo operacional do sistema.

Modelo Matemático para o Problema de Alocação da Frota de Aviões:

Inicialmente são atribuídos símbolos aos parâmetros do problema:

- n_i – número e aviões do tipo i de que a companhia aérea dispõe, $i = 1, 2, 3$;
- K_i – número de passageiros que um avião de tipo i pode transportar, $i = 1, 2, 3$;
- n_{ij} – número de vôos diários que um avião do tipo i pode fazer na rota j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$;
- c_{ij} – custo operacional por viagem de um avião i na rota j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$;

- d_j – número de passageiros a serem transportados diariamente na rota j.

a) Variáveis de decisão:

- x_{ij} – número de aviões do tipo i designados para operar na rota j, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4;
- y_{ij} – número de vôos diários de aviões do tipo i na rota j, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.

Observação: Um avião do tipo i alocado à rota j não precisa fazer n_{ij} vôos diários se a demanda não exigir.

b) Função objetivo:

C – custo operacional diário da frota, a ser minimizado;

Minimizar C:

$$C = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} y_{ij}$$

c) Restrições:

i) De oferta de aviões do tipo i:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq n_i \qquad i = 1, 2, 3;$$

ii) De demanda de passageiros na rota j:

$$\sum_{i=1}^{3} K_i y_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, 2, 3, 4;$$

iii) Vínculo entre as variáveis x_{ij} e y_{ij}:

$$y_{ij} \leq n_{ij} x_{ij} \qquad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4;$$

iv)Referentes às variáveis de decisão

x_{ij} e y_{ij} inteiros, não negativos.

4.6. Transporte de Bagaço de Cana (1[1])

O setor sucro-alcooleiro da região objeto deste estudo, a Divisão Regional Agrícola de Ribeirão Preto, é o mais desenvolvido do Brasil, contando com 40 usinas e destilarias que, no ano de 1984, comercializaram cerca de 330.000 toneladas de bagaço para consumo como combustível em 7 indústrias.

Pesquisas efetuadas pelo IPT indicaram que estas usinas têm condições de fornecer cerca de 1.250.000 toneladas/ano de bagaço, quantidade essa que pode ser absorvida por um mercado potencial representado por 23 indústrias espalhadas pela região.

Assim, o objetivo básico deste trabalho será, através da minimização dos custos globais de utilização, adequar o potencial de oferta gerado por estas 40 usinas às condições de suprimento exigidas pelas 23 indústrias potencialmente consumidoras.

Quatro tipos de problemas se colocam:

4.6.1 Onde instalar unidades de armazenamento e beneficiamento de bagaço, cuja função de custo de produção apresenta economias de escala, de modo a otimizar o sistema global? Estas unidades seriam localizadas nas próprias usinas ou em pontos selecionados junto à malha viária.

---

[1] Este problema foi estudado, sob minha orientação, pelo Eng. Wilson Ribeiro Ramalho em sua Dissertação de Mestrado.

4.6.2 Quanto e que tipo de bagaço cada unidade de beneficiamento de bagaço irá produzir?

4.6.3 Quanto, que tipo e para qual indústria cada usina e cada unidade de beneficiamento irão distribuir bagaço?

4.6.4 Como atender as condições do consumidor: reduzir o custo de utilização do bagaço como combustível, adaptar o equipamento para consumo de bagaço, adequar o tipo de bagaço ao tipo de equipamento, consumir bagaço em boas condições durante todo o período de produção da indústria, independentemente da época de safra da cana?

Em relação ao trabalho original serão feitas algumas simplificações:

a. Não será considerado o custo de adaptação dos equipamentos na indústria para queima do bagaço de cana;
b. Será considerado apenas um tipo de beneficiamento para o bagaço de cana;

Com o intuito didático, será apresentado inicialmente um modelo para a situação hipotética em que todo o bagaço de cana é transportado *in natura*

Modelo Matemático 1 – Situação Hipotética:

Parâmetros do Problema:

- o_i - oferta de bagaço de cana *in natura* em cada usina álcool/açúcar i, $i = 1, ..., m$, onde m representa o número total de usinas;
- d_j - demanda de energia, já expressa em quantidade de bagaço de cana *in natura,* em cada indústria j, $j = 1, .., n$, onde n representa o número de indústrias;
- p_i - o custo do bagaço de cana *in natura* em cada usina i;

- c_{ij} - o custo unitário de transporte (R$/t) do bagaço de cana entre cada usina i e cada indústria j;

Passos para a construção do modelo:

a) Variáveis de decisão:

x_{ij}: quantidade de bagaço de cana transportada entre a usina i e a indústria j;i = 1, ..., m; j = 1, ..., n.

b) Função Objetivo:

Custo total de bagaço de cana colocado nas indústrias, C_t, que deve ser minimizado:

$$C_t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (p_i + c_{ij}) x_{ij}$$

c) Restrições:

i) Oferta de bagaço de cana em cada usina:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i \; ; \qquad i = 1, ..., m.$$

ii) Demanda de bagaço de cana em cada indústria:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq d_j \; ; \qquad j = 1, .., n.$$

Obs.: Está sendo considerada uma premissa, que a oferta global de bagaço de cana é maior que a demanda global.

iii) Não negatividade:

$x_{ij} \geq 0$, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n.

Modelo Matemático 2 – Situação Real:

Parâmetros do Problema:

- o_i: oferta de bagaço de cana *in natura* em cada usina i, i = 1, ..., m;
- E_j: demanda de energia em cada indústria j, j = 1, ..., n;
- p_i: o custo do bagaço de cana *in natura* em cada usina i, i = 1, ..., m;
- e_{bn}: a quantidade de energia aproveitável por unidade de bagaço de cana *in natura;*
- e_{bb}: a quantidade de energia aproveitável por unidade de bagaço beneficiado;
- α: quantidade de bagaço de cana beneficiado obtida a partir de uma unidade de bagaço *in natura;*
- a e b: parâmetros da função custo de beneficiamento $C_b = a + bq$, onde q é a quantidade de bagaço beneficiado obtida no processo;
- Q_{max}: quantidade máxima de bagaço beneficiado (limite tecnológico) em uma unidade de beneficiamento;
- c_{ij}: custo unitário de transporte do bagaço de cana *in natura* entre a usina i e a indústria j;
- d_{ij}: custo unitário de transporte do bagaço de cana beneficiado entre a usina i e a indústria j;
- e_{ik}: custo unitário de transporte de bagaço *in natura* entre a usina i e a unidade independente de beneficiamento k, k = 1, ..., p, onde p é o número de pontos, junto à malha viária, pré-selecionados como candidatos a receber uma unidade de beneficiamento de bagaço de cana;
- f_{kj}: custo unitário de transporte de bagaço beneficiado entre a unidade independente k e a indústria j;

Passos para a construção do modelo:

a) Variáveis de Decisão:

- x_{ij}: quantidade de bagaço *in natura* transportada entre a usina i e a indústria j, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n;
- y_{ij}: quantidade de bagaço beneficiado transportado entre usina i e a indústria j;

- z_{ik}: quantidade de bagaço *in natura* transportada entre a usina i e a unidade independente de beneficiamento k, k = 1, ..., p;
- w_{kj}: quantidade de bagaço de cana beneficiado transportado entre a unidade independente de beneficiamento k e a indústria j;
- u_i: variável de decisão binária que assume valor 1 se for instalada uma unidade de beneficiamento na usina i e, caso contrário, valor 0;
- v_k: variável de decisão binária que assume valor 1 se for instalada uma unidade independente de beneficiamento no ponto pré-selecionado k e, caso contrário, valor 0;

b) Função Objetivo:

Neste caso, devem ser considerados: custo do bagaço *in natura*; custo de beneficiamento e os diversos custos de transporte;

A função objetivo a ser minimizada, C_t, tem a seguinte expressão:

$$C_t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_i + c_{ij})x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}(p_i + e_{ik})z_{ik} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\frac{p_i}{\alpha} + d_{ij})y_{ij} +$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} f_{kj}w_{kj} + \sum_{i=1}^{m}(au_i + b\sum_{j=1}^{n} y_{ij}) + \sum_{k=1}^{p}\left(av_k + b\sum_{j=1}^{n} w_{kj}\right)$$

c) Restrições:

i) Oferta de bagaço em cada usina:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} + \sum_{k=1}^{p} z_{ik} \leq o_i; \qquad i = 1, ..., m.$$

ii) Demanda de energia em cada indústria:

$$e_{bn}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + e_{bb}(\sum_{i=1}^{m} y_{ij} + \sum_{k=1}^{p} w_{kj}) = E_j; \qquad j = 1, ..., n.$$

iii) Balanço de massa em cada unidade independente de beneficiamento:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} w_{kj}; \qquad k = 1, \dots, p.$$

iv)Vínculo entre as variáveis u_i e y_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \le Q_{\max} u_i$$

v) Vínculo entre as variáveis w_{kj} e v_k:

$$\sum_{j=1}^{n} w_{kj} \le v_k Q_{\max}$$

vi)Restrições referentes às variáveis de decisão:

$x_{ij} \ge 0$; $y_{ij} \ge 0$; $z_{ik} \ge 0$; $w_{jk} \ge 0$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, p$.
$u_i = 0$ ou 1; $v_k = 0$ ou 1.

5. Bibliografia

1 – Dantzig, G. Linear rogramming and extensions. Chapter 3.

2 – Braga, M.J.F ; Lermontov, M ; Machado, M.A.S. Modelos de Programação Linear, Capítulos 1 e 2.