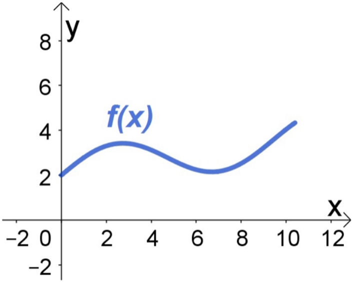
Superfície de Revolução, Centro de Massa, Técnicas de integração
Aula 32

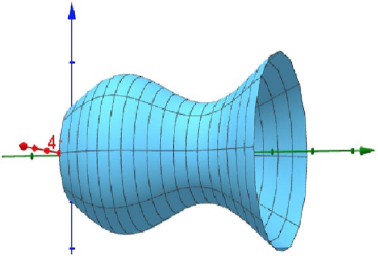
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

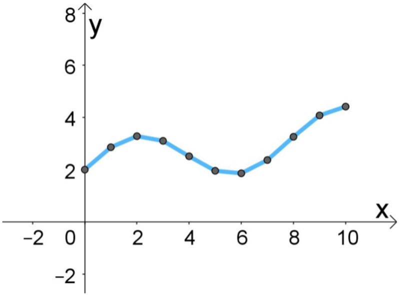
Primeiro Semestre de 2023

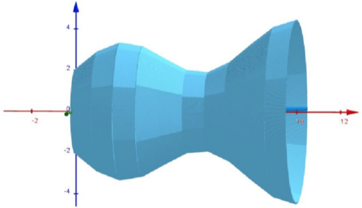
Área de Superfície de Revolução

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta. Tal superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução já discutido anteriormente.

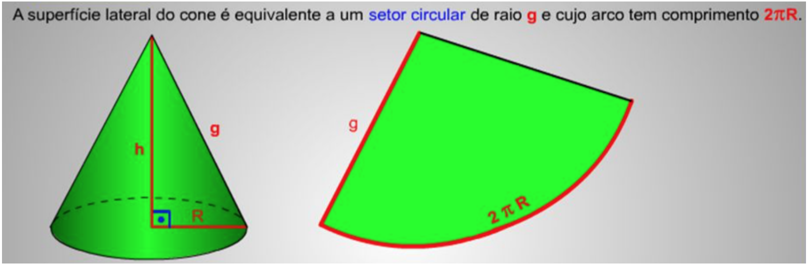

y
8
6
4
2
f(x)
x
−2 0
2
4
6
8
10
12
−2


4


8
y
6
4
2
x
-2
0
2
4
6
8
10
-2

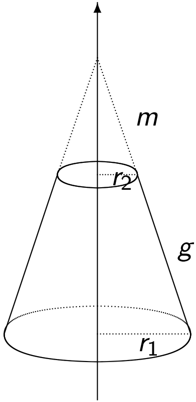


Área lateral de um cone



$$\text{Área} = \frac{1}{2}\frac{2\pi R}{g}g^2 = \pi R g$$

Considere um tronco de cone circular reto, de geratriz g, raio da base maior r_1 e raio da base menor r_2. Esta é a superfície de revolução obtida pela revolução de um segmento em torno de um eixo.



A área lateral, A_T, do tronco de cone é dada por

$$\boxed{A_T = \pi(g+m)r_1 - \pi m r_2,}$$

$$\frac{g+m}{m} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow \frac{g}{m} = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \rightarrow m = \frac{g r_2}{r_1 - r_2}$$

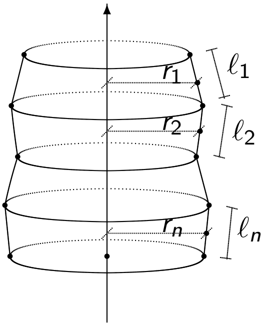
$$(g+m)r_1 = \frac{m r_1^2}{r_2} = \frac{g r_1^2}{r_1 - r_2} \quad \text{e} \quad m r_2 = \frac{g r_2^2}{r_1 - r_2}$$

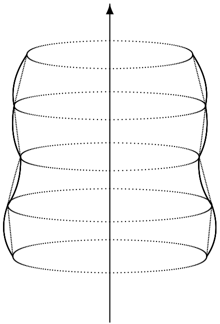
Portanto

$$A_T = \pi(r_1 + r_2)g = 2\pi r g,$$

onde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$.

Podemos então calcular a área de uma superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo deste plano pois a área desta superfície é a soma das áreas laterais de troncos de cones.
Seja A a área lateral da superfície gerada pela rotação da poligonal da figura abaixo. Então temos





$$A = 2\pi\, r_1\ell_1 + \cdots + 2\pi\, r_n\ell_n$$

Agora vamos deduzir a área lateral de um sólido de revolução qualquer em torno do eixo x pela aproximação da soma das áreas laterais de vários troncos de cone.

Consideremos f definida e positiva em $[a, b]$ com derivada contínua em (a, b). Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Consideremos a poligonal com vertices $(x_i, f(x_i))$ e girando-a ao redor do eixo x obtemos uma aproximação para a superfície. A área de cada tronco de cone é

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i,$$

onde $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$, como foi feito anteriormente. Quando Δx_i é pequeno temos que $f(x_i) \approx f(c_i)$ e também $f(x_{i-1}) \approx f(c_i)$ pois f é contínua.

Portanto,

$$A_i \approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i,$$

e então uma aproximação para a área da superfície é

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i.$$

Esta aproximação torna-se melhor quando $\|P\| \to 0$. Então definimos a **área da superfície obtida por rotação, ao redor do eixo** x**, da curva** $y = f(x),\ f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$, como

$$\boxed{S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\ \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\,.}$$

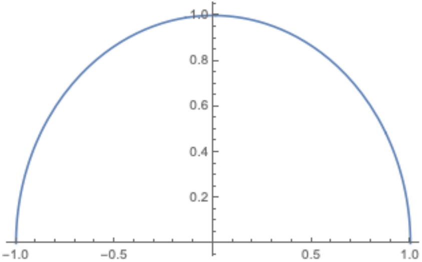
Exemplo

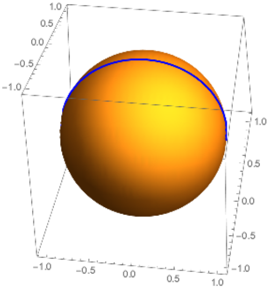
Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, *ao redor do eixo* x.

Temos $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, e assim,

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2R\pi \int_{-R}^{R} 1\, dx = 4\pi R^2.
\end{aligned}
$$

Exemplo com $R = 1$





Centro de Massa

Consideremos uma fina placa (chamada de *lâmina*) com densidade superficial uniforme ρ que ocupa uma região A do plano.

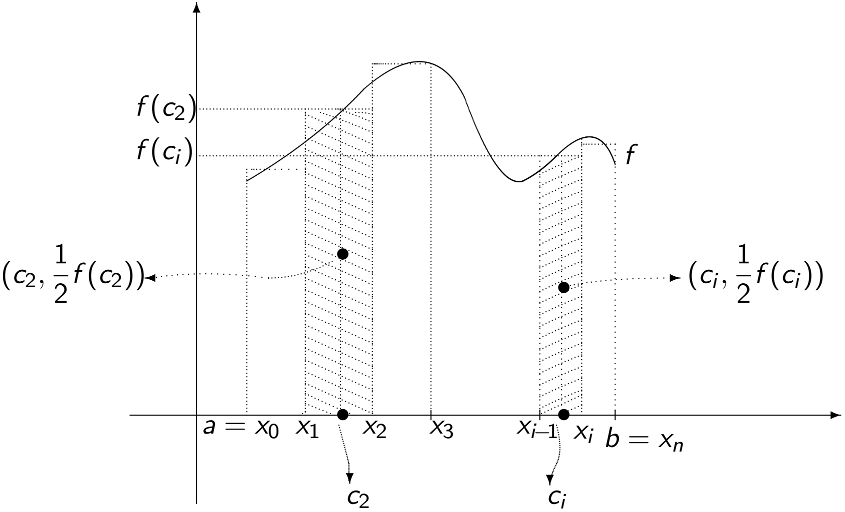
Desejamos encontrar o ponto P no qual a placa se equilibra horizontalmente. Esse ponto é chamado *centro de massa* da placa ou *centróide* de A.

Suponha que a região A seja da forma

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a \leq x \leq b\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}\ ,$$

onde f é contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Consideremos uma partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$ e escolhemos o ponto c_i como sendo ponto médio do intervalo $[x_{i-1}\,,\, x_i]$, que é $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Isto determina uma aproximação de A por retângulos.


$f(c_2)$
$f(c_i)$
f
$(c_2, \frac{1}{2}f(c_2))$
$(c_i, \frac{1}{2}f(c_i))$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_{i-1}
x_i
$b = x_n$
c_2
c_i

O centro de massa do retângulo hachurado R_i é seu centro

$$\left(c_i\,,\,\frac{f(c_i)}{2}\right).$$

Sua área é $f(c_i)\Delta x_i$; assim sua massa é

$$m_i = \rho\,\underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}}\,\underbrace{f(c_i)}_{\text{altura}}\,. \tag{1}$$

O centro de massa da região $R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n$ será dado por

$$
\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \, , \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i)}{2} \, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right) \quad \underline{\underline{(1)}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \rho \, f(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho \, f(c_i) \Delta x_i} \, , \; \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \rho f(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho \, f(c_i) \Delta x_i} \right) \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \, f(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i} \, , \; \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i} \right).
\end{aligned}
$$

Daí, fazendo $\|P\| = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \to 0$, obtemos o **centro de massa** da região A

$$
\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} \, , \, \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\text{área } A} \int_a^b x\, f(x)\, dx \, , \, \frac{1}{\text{área } A} \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx \right).
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule o centro de massa da região sob o gráfico de $y = \cos(x)$, $0 \leq x \leq \pi/2$.

A área da região é: $\text{área } A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1$;

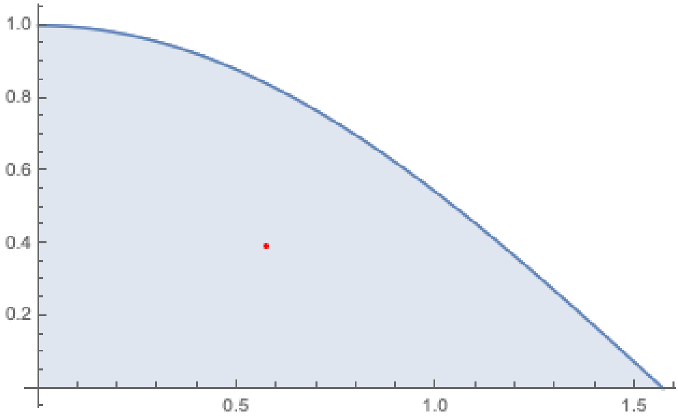
assim,

$$x_c = \frac{1}{\text{área } A} \int_0^{\pi/2} x\, f(x)\, dx = x \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$y_c = \frac{1}{\text{área } A} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x))\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

Portanto o centro de massa é $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8} \right)$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1.0
1.5

Se a região A está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, então o mesmo argumento anterior pode ser usado para mostrar que o **centro de massa** de

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a \leq x \leq b\,,\ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

é dado por (com $S =$ área de A)

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{1}{S} \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx\ ,\ \frac{1}{2S} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx \right).$$

Exemplo

Determine o centro de massa da região A limitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

A área da região é

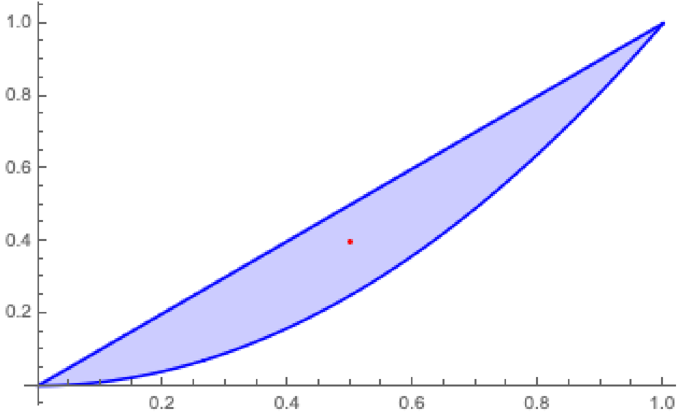
$$\text{área } A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$x_c = 6 \int_0^1 x(x - x^2)\, dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$y_c = 6\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

O centro de massa é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Integrais de funções trigonométricas

Nesta seção usaremos identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Exemplo

Calcule $\int \cos^3(x)\, dx$.

Observe que $\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1 - \mathrm{sen}^2(x))\cos x$.
Fazendo $u = \mathrm{sen}(x)$ temos $du = \cos(x)\, dx$.

$$\int \cos^3(x)\, dx = \int (1 - \mathrm{sen}^2(x))\cos(x)\, dx = \int (1 - u^2)\, du$$
$$= u - \frac{u^3}{3} + k = \mathrm{sen}(x) - \frac{1}{3}\mathrm{sen}^3(x) + k.$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2}$$

Exemplo

Calcule $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$.

Observe que $\operatorname{sen}(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(x)]$. Então,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(x)]\,dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x + k.\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx.$

Observe que $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ e $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. Então,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\ dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}(2x)+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right)+k.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx$.

Observe que $\operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x) = (\operatorname{sen}^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) = (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)$. Fazendo $u = \cos(x)$ temos $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx &= \int (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx\\ &= \int (1-u^2)^2u^2(-du) = -\int (u^2-2u^4+u^6)\,du\\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + k\\ &= -\frac{\cos^3(x)}{3} + 2\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^7(x)}{7} + k.\end{aligned}$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x)\, dx$.

(a) Se n for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^{(2k+1)}(x)\, dx = \int \operatorname{sen}^m(x) \left(\cos^2(x)\right)^k \cos(x)\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m(x)(1 - \operatorname{sen}^2(x))^k \cos(x)\, dx.$$

Então faça $u = \operatorname{sen}(x)$.

(b) Se m for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^{(2k+1)}(x) \cos^n(x)\, dx = \int (\operatorname{sen}^2(x))^k \cos^n(x) \operatorname{sen}(x)\, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2(x))^k \cos^n(x) \operatorname{sen}(x)\, dx.$$

Então faça $u = \cos(x)$.

(c) Se m e n forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos metade

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Algumas vezes pode ser útil a identidade

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x).$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$ **ou** $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx$ **ou** $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$.

Utilize a identidade correspondente:

(a) $2\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)$,

(b) $2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,

(c) $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais envolvendo potências de tangente e secante.

Exemplo

Calcule $\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x)\, dx.$

Observe que
$\operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) = \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x) = \operatorname{tg}^6(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x)) \sec^2 x.$
Fazendo $u = \operatorname{tg}(x)$ temos $du = \sec^2(x)\, dx$ e assim

$$\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x)\, dx = \int \operatorname{tg}^6(x)(1+\operatorname{tg}^2(x)) \sec^2(x)\, dx = \int u^6(1+u^2)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + k = \frac{\operatorname{tg}^7(x)}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9(x)}{9} + k.$$

Exemplo

Calcule $\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\,dx.$

Observe que $\operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x) = \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x) = (\sec^2(x)-1)^2\sec^6(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)$. Fazendo $u = \sec(x)$ temos $du = \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\,dx &= \int (\sec^2(x)-1)^2\sec^6(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx \\ &= \int (u^2-1)^2u^6\,du = \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + k \\ &= \frac{\sec^{11}(x)}{11} - 2\frac{\sec^9(x)}{9} + \frac{\sec^7(x)}{7} + k.\end{aligned}$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x)\, dx$.

(a) Se n for par,

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^{2k}(x)\, dx = \int \operatorname{tg}^m(x) (\sec^2(x))^{k-1} \sec^2 x\, dx$$
$$= \int \operatorname{tg}^m(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))^{k-1} \sec^2(x)\, dx.$$

Então faça $u = \operatorname{tg}(x)$.

(b) Se m for ímpar,

$$\int \operatorname{tg}^{(2k+1)}(x) \sec^n(x)\, dx = \int (\operatorname{tg}^2(x))^k \sec^{n-1}(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x)\, dx$$
$$= \int (\sec^2(x) - 1)^k \sec^{n-1}(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x)\, dx.$$

Então faça $u = \sec(x)$.

Estratégia para avaliar $\int \mathrm{cotg}^m(x)\, \mathrm{cossec}^n(x)\, dx.$

Procedimento semelhante ao anterior.

Fórmulas de recorrência para o cálculo das integrais $\int \mathrm{tg}^n(x)\, dx$ e $\int \sec^n(x)\, dx$.

$$\int \mathrm{tg}^n(x) dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\, dx$$

$$\int \sec^n(x)\, dx = \frac{\sec^{n-2}(x)\,\mathrm{tg}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x)\, dx.$$

Dica: Primeira por substituição, com as duas integrais do lado esquerdo. A segunda por partes....uma parte da integral vai para o lado esquerdo para aparecer $n-1$.

Fórmulas de recorrência para o cálculo das integrais $\int \operatorname{cotg}^n(x)\,dx$ **e** $\int \operatorname{cossec}^n(x)\,dx$.

$$\int \operatorname{cotg}^n(x)dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \operatorname{cossec}^n(x)\,dx = -\frac{\operatorname{cossec}^{n-2}(x)\operatorname{cotg}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cossec}^{n-2}(x)\,dx.$$

Dica: Primeira por substituição, com as duas integrais do lado esquerdo. A segunda por partes....uma parte da integral vai para o lado esquerdo para aparecer $n-1$.