Aproximação da Binomial pela Normal

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2023

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente
desenvolvido pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula)

Sumário

Sumário

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

Função de probabilidade

A função de probabilidades de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0,1,\ldots,n$. Denotamos $X \sim \mathsf{B}(n,p)$.

Esperança

Se $X \sim \mathsf{B}(n,p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim Be(p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(X_1) + \cdots + \mathsf{E}(X_n) = np.$$

Variância

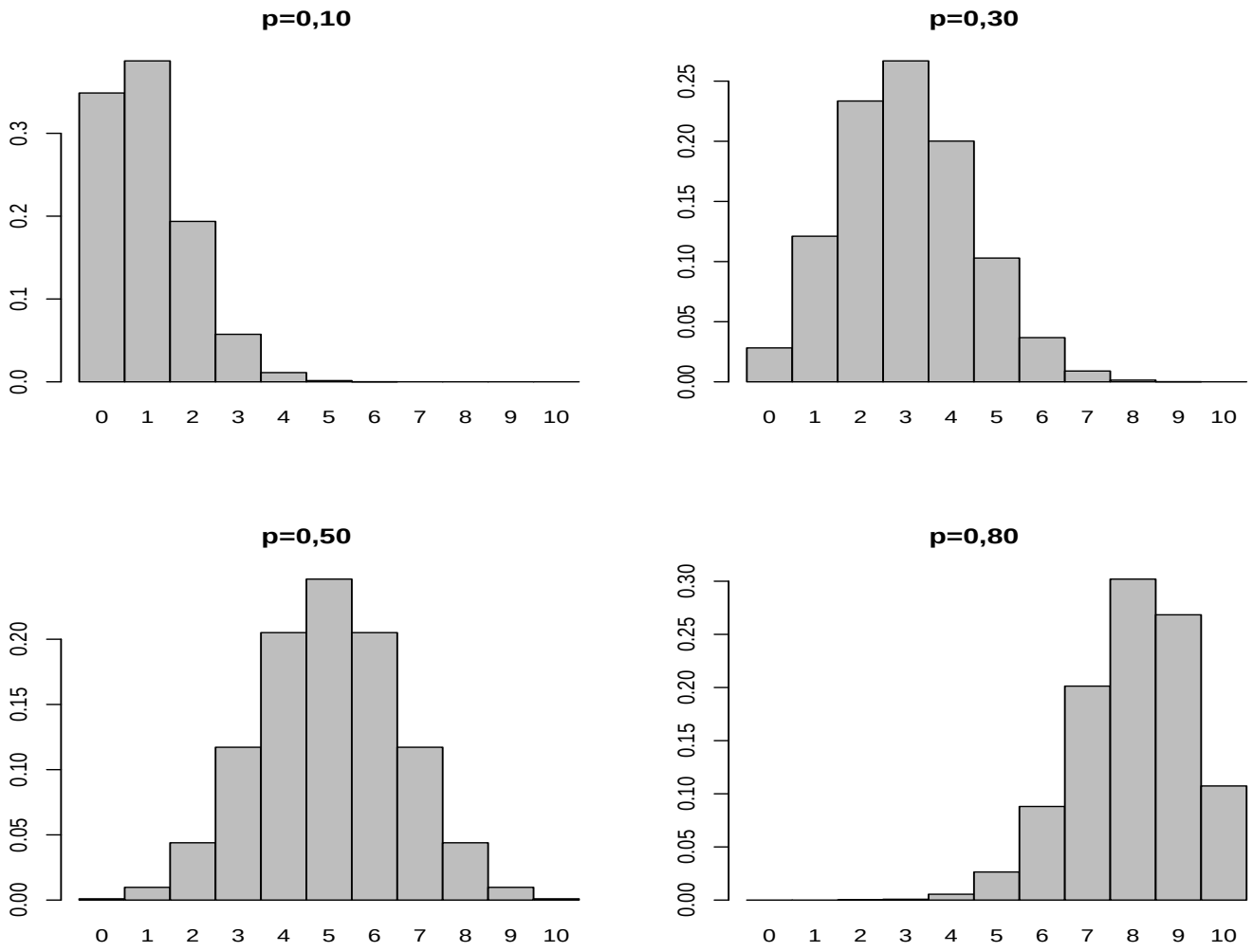
Similarmente como temos n ensaios independentes, então

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(X_1) + \cdots + \mathsf{Var}(X_n) = np(1-p).$$

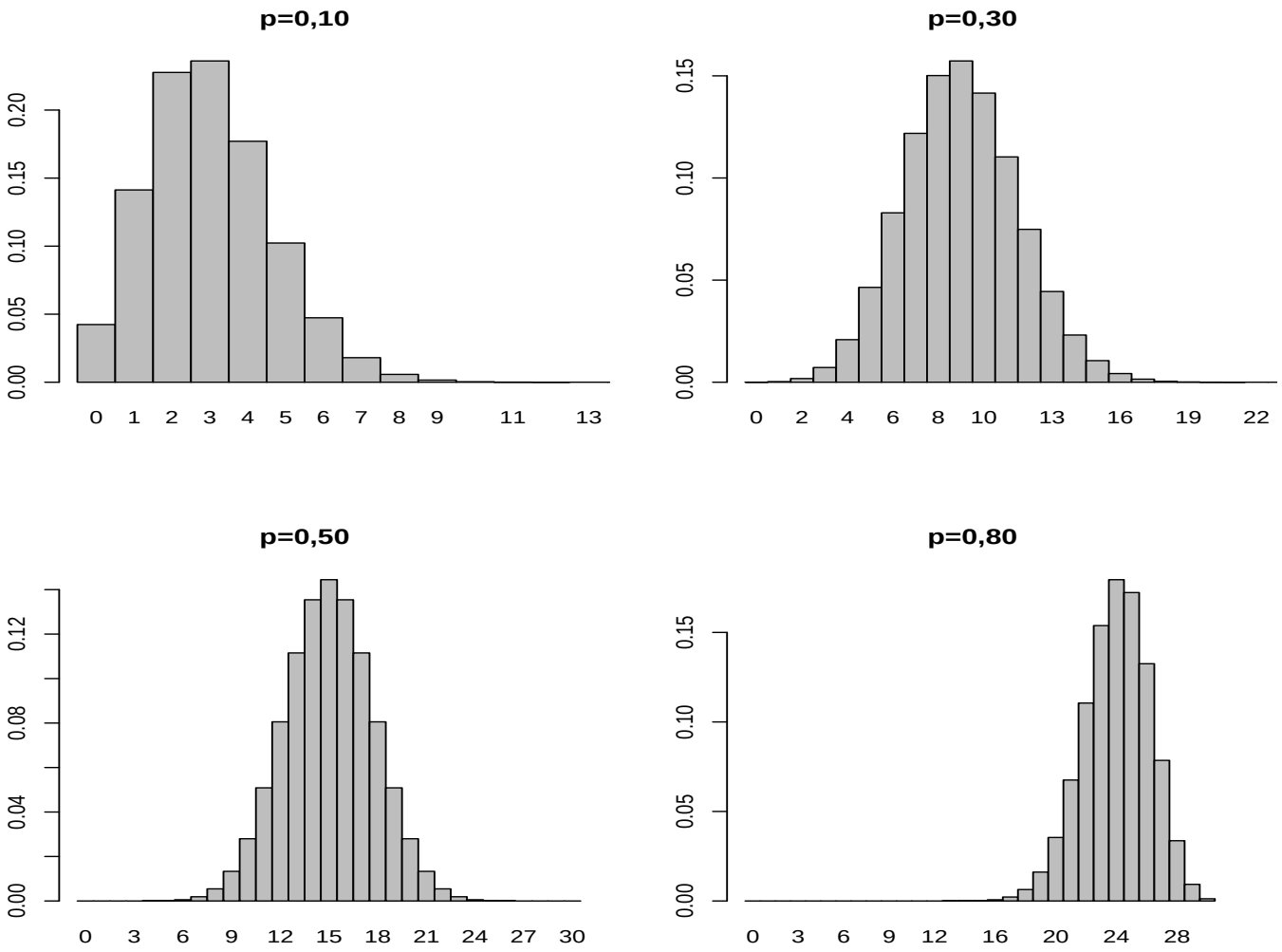
E daí segue que $\mathsf{DP}(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Sumário

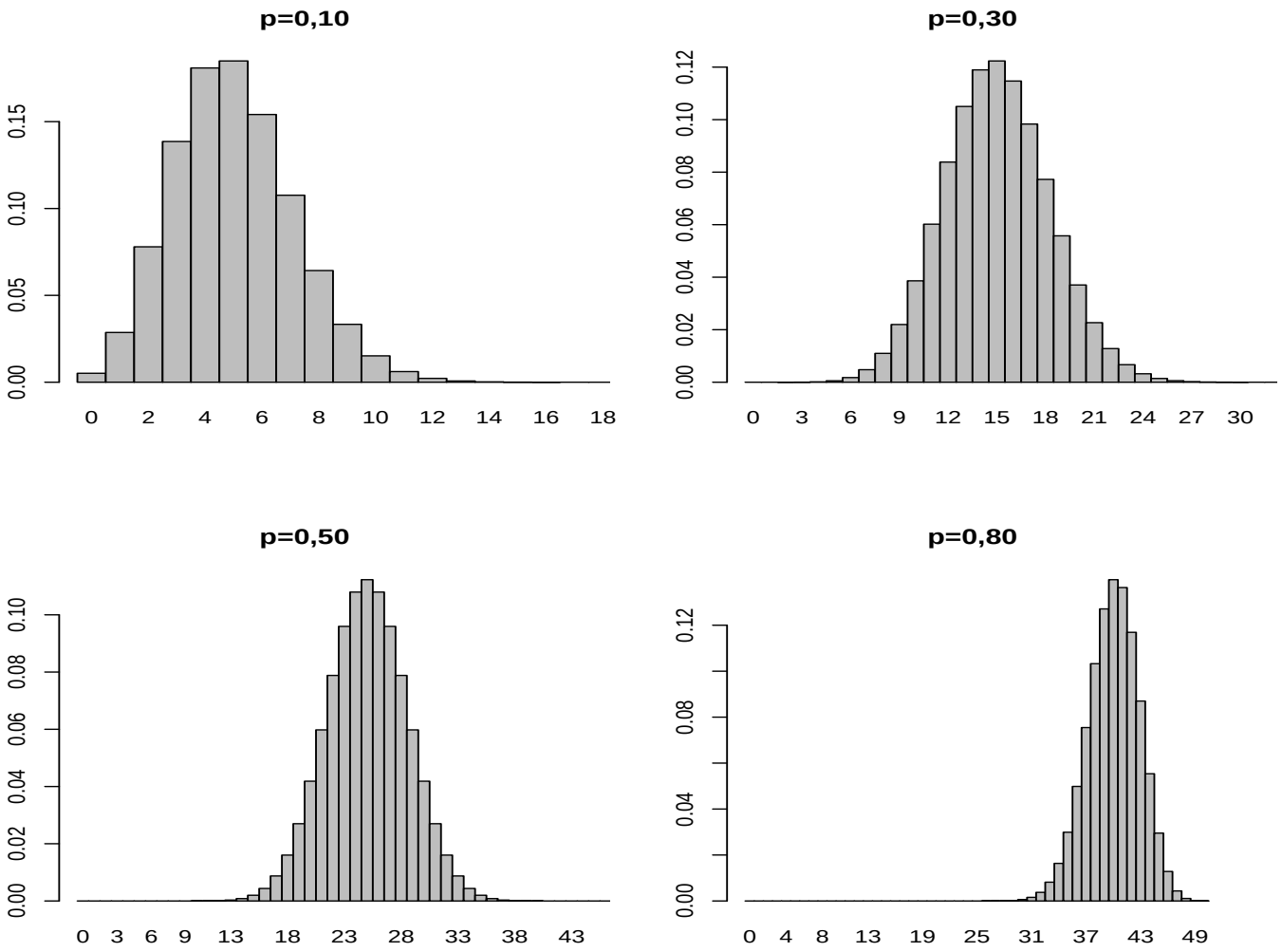
Histogramas B(n,p) para $n = 10$



Histogramas B(n,p) para $n = 30$

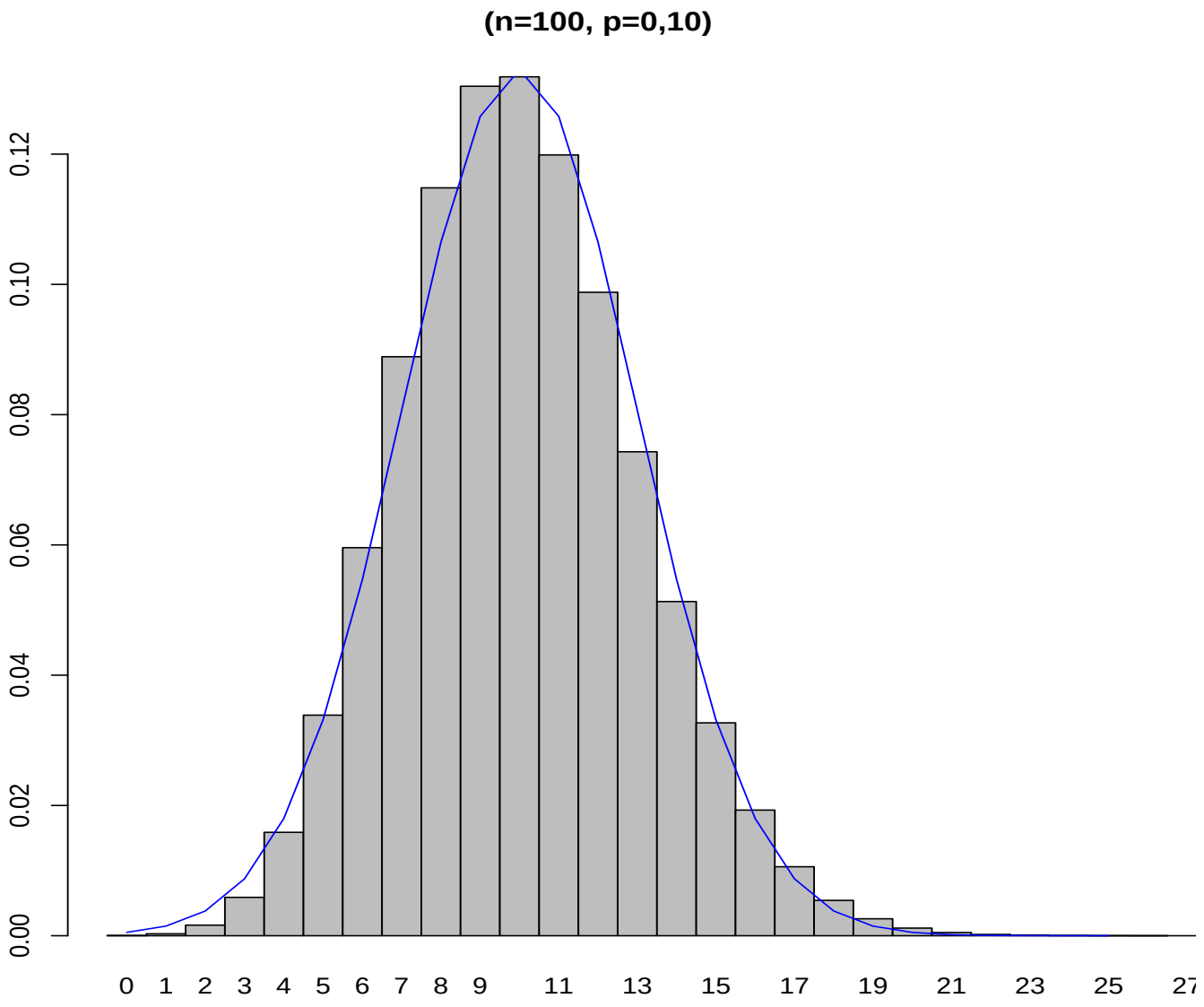


Histogramas B(n,p) para $n = 50$

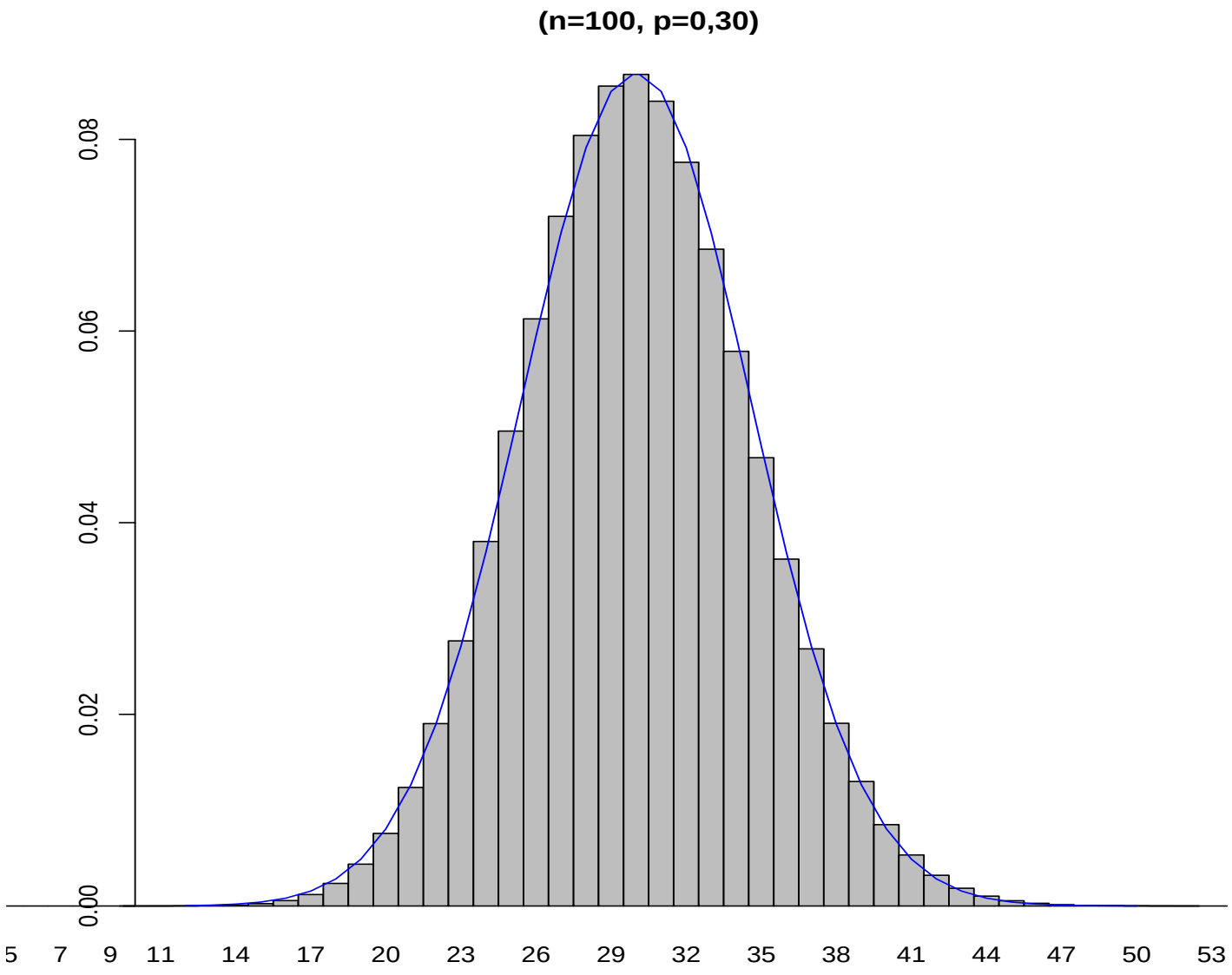


Sumário

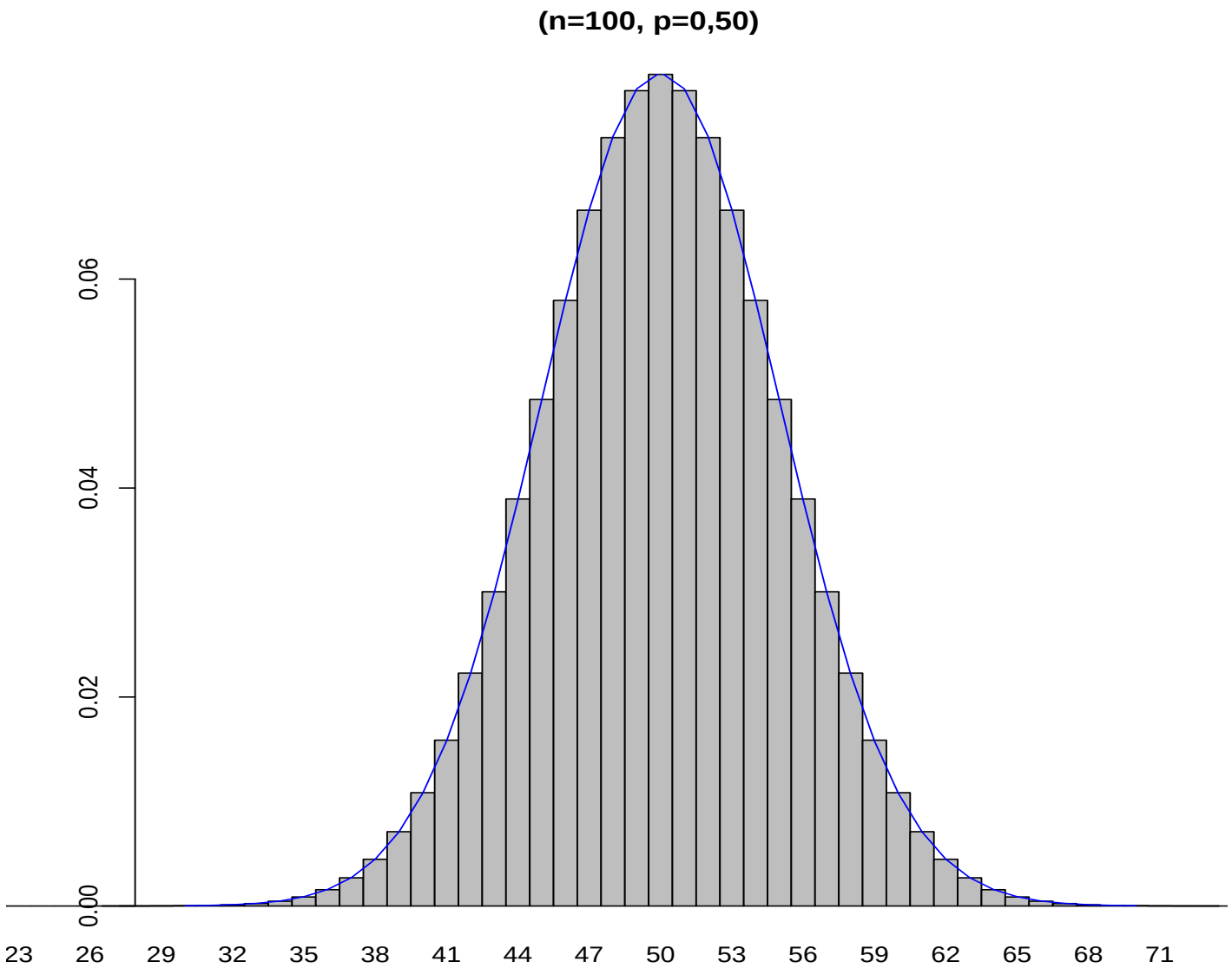
Aproximação da B(n,p) pela N$(np, np(1-p))$



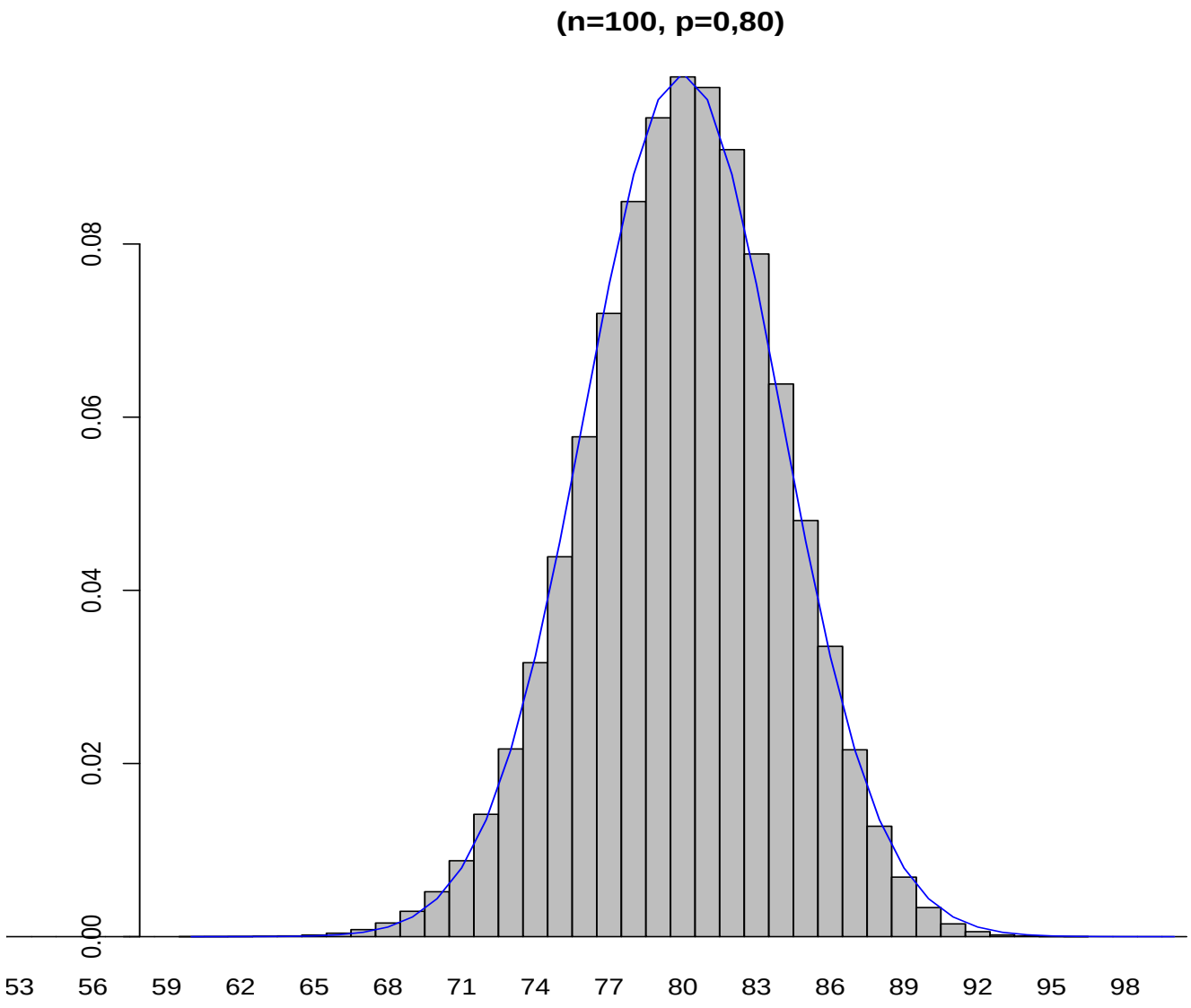
Aproximação da B(n,p) pela N$(np, np(1-p))$



Aproximação da B(n,p) pela N$(np, np(1-p))$



Aproximação da B(n,p) pela N$(np, np(1-p)$



Cálculo da Probabilidade

Se $np(1-p)$ é grande, então

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a \leq Y \leq b)$$

em que $X \sim$ B(n,p), $Y \sim$ N$(np,np(1-p))$.

Correção de Continuidade

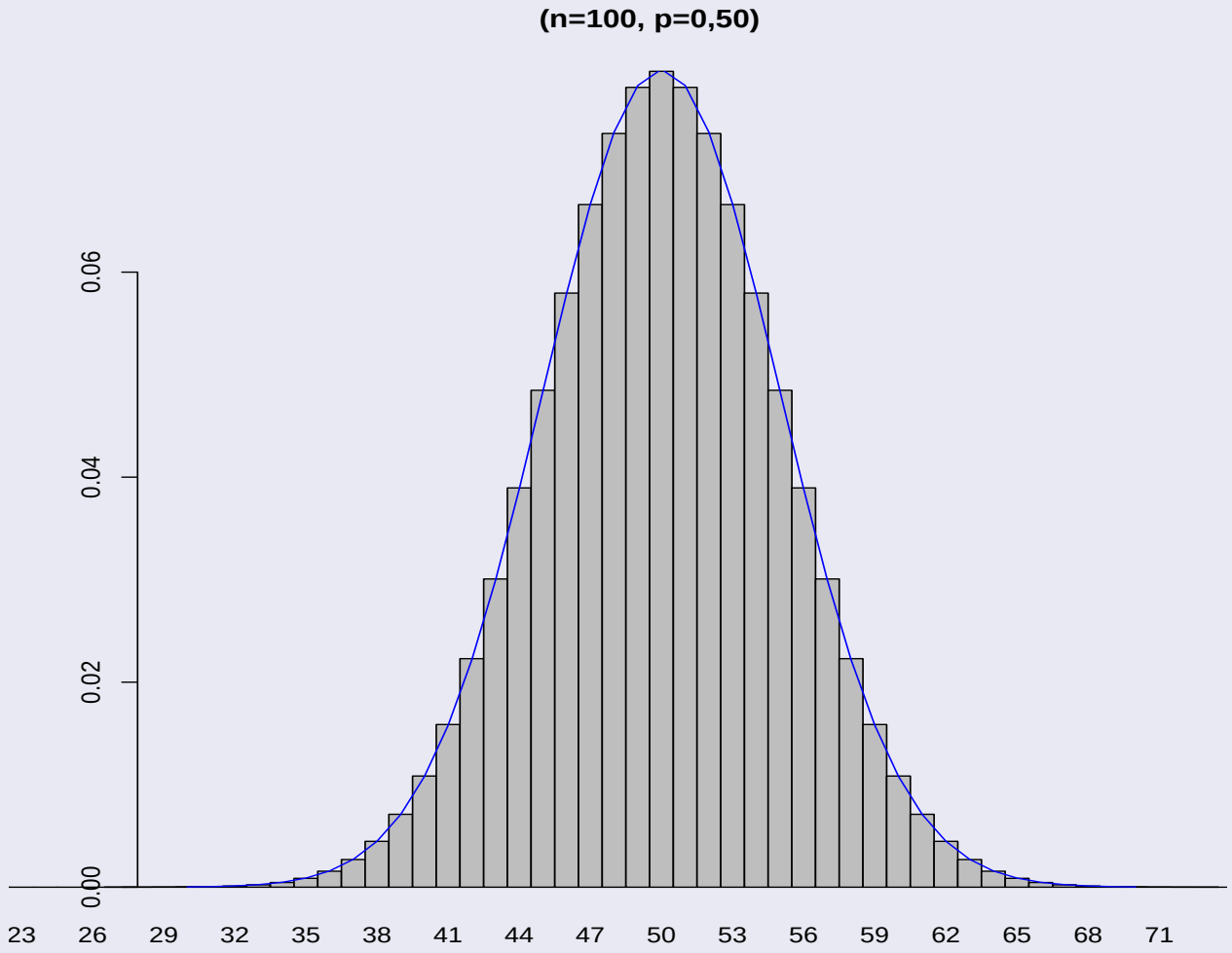
A correção de continuidade é um procedimento aplicado para melhorar a aproximação de distribuições discretas através de distribuições contínuas.

Na aproximação da distribuição binomial pela normal, temos o seguinte:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0{,}5 \leq Y \leq b + 0{,}5)$$

em que $X \sim \mathsf{B}(n{,}p)$, $Y \sim \mathsf{N}(np{,}np(1-p))$.

Aproximação da B(n,p) pela N$(np, np(1-p))$



Sumário

Exemplo 1

Supor $X \sim \mathsf{B}(225; 0{,}2)$. Então,

- $\mathsf{E}(X) = np = 225 \times 0{,}2 = 45$
- $\mathsf{Var}(X) = np(1-p) = 225 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 36$
- $\mathsf{DP}(X) = \sqrt{36} = 6$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim \mathsf{N}(45, 6^2)$.

Cálculo da Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(39 \leq X \leq 48) &\approx P(38{,}5 \leq Y \leq 48{,}5) \\
&= P\left(\frac{38{,}5 - 45}{6} \leq Z \leq \frac{48{,}5 - 45}{6}\right) \\
&= P(-1{,}08 \leq Z \leq 0{,}58) \\
&= P(Z \leq 0{,}58) - P(Z \leq -1{,}08) \\
&= P(Z \leq 0{,}58) - [1 - P(Z \leq 1{,}08)] \\
&= A(0{,}58) - [1 - A(1{,}08)] \\
&= 0{,}7190 - 0{,}1401 \\
&= 0{,}5789.
\end{aligned}
$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(39 \leq X \leq 48) = 0{,}5853$.

Exemplo 1

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned} P(39 \leq X \leq 48) &\approx P(39 \leq Y \leq 48) \\ &= 0{,}5328. \end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(39 \leq X \leq 48) = 0{,}5853$.

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 42) &\approx P(Y \geq 41{,}5) \\
&= P\left(Z \geq \frac{41{,}5 - 45}{6}\right) \\
&= P(Z \geq -0{,}58) \\
&= P(Z \leq 0{,}58) \\
&= A(0{,}58) \\
&= 0{,}7190.
\end{aligned}
$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(X \geq 42) = 0{,}7164$.

Exemplo 1

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned} P(X \geq 42) &\approx P(Y \geq 42) \\ &= 0{,}6915. \end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(X \geq 42) = 0{,}7164$.

Cálculo da Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(41 < X < 52) &= P(42 \leq X \leq 51) \\
&\approx P(41{,}5 \leq Y \leq 51{,}5) \\
&= P\left(\frac{41{,}5 - 45}{6} \leq Z \leq \frac{51{,}5 - 45}{6}\right) \\
&= P(-0{,}58 \leq Z \leq 1{,}08) \\
&= A(1{,}08) - [1 - A(0{,}58)] \\
&= 0{,}5789.
\end{aligned}
$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(42 \leq X \leq 51) = 0{,}5765$.

Exemplo 1

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned} P(41 < X < 52) &= P(42 \leq X \leq 51) \\ &\approx P(42 \leq Y \leq 51) \\ &= 0{,}5328. \end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(42 \leq X \leq 51) = 0{,}5765$.

Exemplo 2

Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais com confiabilidade (probabilidade de funcionar adequadamente num certo período) igual a $0{,}9$. Esses componentes funcionam de forma independente e para o sistema funcionar é preciso que pelo menos 87 desses componentes estejam funcionando. Qual é a confiabilidade do sistema?

Exemplo 2

Seja $X =$ número de componentes que funcionam adequadamente. Suposição $X \sim \mathsf{B}(100; 0{,}9)$. Então,

- $\mathsf{E}(X) = np = 100 \times 0{,}9 = 90$
- $\mathsf{Var}(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 9$
- $\mathsf{DP}(X) = \sqrt{9} = 3$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim \mathsf{N}(90, 3^2)$.

Exemplo 2

Cálculo da Confiabilidade do Sistema

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 87) &\approx P(Y \geq 86{,}5) \\
&= P\left(Z \geq \frac{86{,}5 - 90}{3}\right) \\
&= P(Z \geq -1{,}17) \\
&= P(Z \leq 1{,}17) \\
&= A(1{,}17) \\
&= 0{,}879.
\end{aligned}
$$

A confiabilidade do sistema é $0{,}879$.

Exemplo 3

Um exame é constituído de 120 questões de múltipla escolha sendo que cada questão tem 4 alternativas. Calcule aproximadamente a probabilidade de um candidato que escolhe as alternativas ao acaso acertar mais do que 1/3 das questões.

Exemplo 3

Seja $X =$ número de questões respondidas corretamente pelo candidato. Suposição $X \sim \mathsf{B}(120; 0{,}25)$. Então,

- $\mathsf{E}(X) = np = 120 \times 0{,}25 = 30$
- $\mathsf{Var}(X) = np(1-p) = 120 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 22{,}5$
- $\mathsf{DP}(X) = \sqrt{22{,}5} \approx 4{,}74$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim \mathsf{N}(30; 4{,}74^2)$.

Exemplo 3

Cálculo da Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X > 40) &\approx P(Y \geq 40{,}5) \\
&= P\left(Z \geq \frac{40{,}5 - 30}{4{,}74}\right) \\
&= P(Z \geq 2{,}215) \\
&= 1 - P(Z \leq 2{,}215) \\
&= 1 - A(2{,}215) \\
&= 1 - 0{,}986 \\
&= 0{,}014.
\end{aligned}
$$

Portanto, de cada 100 alunos que responderem as questões ao acaso espera-se apenas 1 com mais do que 40 acertos.

Exemplo 5

Num ambulatório médico sabe-se que 60% das receitas de analgésico prescrevem aspirina e 40% prescrevem dipirona sódica. Num determinado dia há em estoque 70 comprimidos de aspirina e 50 comprimidos de dipirona sódica. Se nesse dia são prescritas 100 receitas, calcule aproximadamente a probabilidade de todas as receitas serem atendidas.

Exemplo 5

Vamos considerar a variável aleatória $X =$ número de prescrições de aspirina. Note que sabendo-se o número de prescrições de aspirina sabe-se também o número de prescrições de dipirona sódica. Suposição $X \sim \mathsf{B}(100; 0{,}60)$. Então,

- $\mathsf{E}(X) = np = 100 \times 0{,}60 = 60$
- $\mathsf{Var}(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}60 \times 0{,}40 = 24$
- $\mathsf{DP}(X) = \sqrt{24} \approx 4{,}90$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim \mathsf{N}(60; 4{,}90^2)$.

Cálculo da Probabilidade

Portanto, temos que P(todas as prescrições serem atendidas) = $P(50 \leq X \leq 70)$. Então,

$$\begin{aligned}
P(50 \leq X \leq 70) &\approx P(49{,}5 \leq Y \leq 70{,}5) \\
&= P\left(\frac{49{,}5 - 60}{4{,}90} \leq Z \leq \frac{70{,}5 - 60}{4{,}90}\right) \\
&= P(-2{,}143 \leq Z \leq -2{,}143) \\
&= 2\,A(-2{,}143) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}983 - 1 \\
&= 0{,}966.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de todas as prescrições serem atendidas é aproximadamente 0,966.