ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À DÉCIMA TERCEIRA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

Exercício 1. (Seção 5.6, Problema 1) Mostre que se A é similar a B ($P^{-1}AP = B$) e B é similar a C ($S^{-1}BS = C$), então A é similar a C ($T^{-1}AT = C$).

Exercício 2. (Seção 5.6, Problema 19) Suponha que T é uma matriz 3 por 3 triangular superior. Compare as entradas de TT^* e T^*T e mostre que, se elas forem iguais, então T é uma matriz diagonal. Conclua que todas as matrizes triangulares normais são diagonais.

Exercício 3. (Seção 5.6, Problema 35) Calcule J^2 e J^3 quando

$$J = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Adivinhe a forma de J^k, $k \geq 1$. A partir dessa forma, tente adivinhar J^{-1} e verifique o seu palpite.

Exercício 4. (Seção 5.6, Problema 38) As matrizes de Jordan abaixo têm autovalores 0, 0, 0 e 0. Elas têm dois autovetores (encontre-os). Como os blocos são diferentes, J não é similar a K.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tem blocos } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tem blocos } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Para qualquer matriz $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, compare JM com MK. Mostre que se $JM = MK$, então M não é inversível. Conclua que $M^{-1}JM = K$ é impossível.

Exercício 5. (Seção 5.6, Problema 39) Prove em três passos que A^T sempre é similar a A (nós já sabemos que os autovalores são os mesmos, pois $p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda)$. O problema são os autovetores):

a) Para um bloco de Jordan J_i, ache uma permutação M_i tal que $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$.

b) Para uma matriz J formada de blocos de Jordan, construa M através de blocos tais que $M^{-1}JM = J^T$.

c) Para qualquer $A = MJM^{-1}$, mostre que A^T é similar a J^T. Conclua que A^T é similar a A.

Exercício 6. (Seção 5.6, Problema 44) Por que as afirmações abaixo são verdadeiras?

a) Se A é similar a B, então A^2 é similar a B^2.

b) A^2 e B^2 podem ser similares, sem que A e B sejam similares (tente matrizes dois por dois com autovalores 0 e 0).

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar a $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar a $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

e) Se trocamos as linhas 1 por 2 de A e trocamos as colunas 1 por 2, então obtemos uma matriz com os mesmos autovalores.

Exercício 7. (Seção 7.3, Problema 1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ com autovalores 1 e 3, aplique o método das potências com $u_0 = (1, 0)$ e determine o limite $\lim_{j\to\infty} u_j$.

Exercício 8. (Seção 7.3, Problema 2) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $u_0 = (3, 4)$, aplique três passos do método de potências inversa (que usa A^{-1}) e compare com um passo do método com deslocamento $(A - \alpha I)^{-1}$ com $\alpha = u_0^T A u_0 / u_0^T u_0$. O vetor limite $\lim_{j\to\infty} u_j$ agora é um múltiplo do outro autovetor $(1, 1)$.

Exercício 9. (Seção 7.3, Problema 4) A matriz de Markov $A = \begin{bmatrix} .9 & .3 \\ .1 & .7 \end{bmatrix}$ tem autovalores 1 e 0.6 e o método das potências converge para $(.75, .25)$. Ache os autovetores de A^{-1}. Para quem converge o método das potências inversas (o que usa A^{-1})?

Exercício 10. (Seção 7.3, Problema 8) Dado $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, mostre que se $A = QR$ (decomposição QR) e $A_1 = RQ$ (algoritmo QR), temos $A_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

Exercício 11. (Seção 7.3, Problema 10) Verifique que o algoritmo QR aplicado à matriz tridiagonal $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não converge. (Calcule uma iteração do método: $A = QR$ e $A_1 = RQ$. O que está acontecendo?)