Aula 25: Grupo Fundamental

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Definição 1

(X, x_0) é dito um espaço com ponto base se X é um espaço topológico e $x_0 \in X$. Denotamos por $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se $f : X \to Y$ e $f(x_0) = y_0$. Dizemos que (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes se existem $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ relativamente a $\{y_0\}$ e $g \circ f \simeq Id_X$ relativamente a $\{x_0\}$.

Funções contínuas com um ponto base conversam bem com homomorfismos nos grupos.

Proposição 2

Toda $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ contínua induz um homomorfismo $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Demonstração. Para cada laço g sobre x_0 defina $f^\dagger g(t) = f(g(t))$. Note que $f^\dagger g$ é um laço sobre y_0. Defina $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ como $f^\sharp([g]) = \left[f^\dagger g\right]$. Note que $f^\sharp$ está bem definida (exercício). Resta então mostrar que $f^\sharp([g] * [h]) = f^\sharp([g]) * f^\sharp([h])$. Note que

$$f^\dagger(g * h) = \begin{cases} f(g(2x)) = f_g(2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(h(2x-1)) = f_h(2x-1), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} = f^\dagger g * f^\dagger h.$$

Proposição 3

(a) $(Id_X)^\sharp = Id_{\pi_1(X,x_0)}$;

(b) *Se* $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *são tais que* $f \simeq g$ *com relação a* $\{x_0\}$, *então* $f^\sharp = g^\sharp$;

(c) *Se* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *e* $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, *então* $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$.

Demonstração. (a) Imediato.

(b) Seja h laço sobre x_0. Basta mostrar que $f^\dagger h \simeq_{x_0} g^\dagger h$. Note que a demonstração segue de maneira análoga à prova de que composta de homotópicas é homotópica, tomando-se cuidado com x_0. $\bar{H}(x,t) = H(h(x),t)$

(c) Seja h laço sobre x_0. Dado $t \in [0,1]$, temos $(g \circ f)^\dagger h(t) = (g \circ f)(h(t)) = g(f \circ h)(t) = g(f^\dagger h)(t) = g^\dagger f^\dagger h(t) = (g^\dagger \circ f^\dagger)h(t)$.

Proposição 4

Se (X, x_0) *e* (Y, y_0) *são homotopicamente equivalentes, então* $\pi_1(X, x_0)$ *e* $\pi_1(Y, y_0)$ *são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ relativamente a y_0 e $g \circ f \simeq Id_X$ relativamente a x_0. Assim, $(g \circ f)^\sharp = Id_{\pi_1(X, x_0)}$ e $(f \circ g)^\sharp = Id_{\pi_1(Y, y_0)}$, mas $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$ e $(f \circ g)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$. Logo, $f^\sharp$ e $g^\sharp$ são isomorfismos.

Corolário 5

Se (X, τ) *e* (Y, σ) *são tais que* $\pi_1(X, x_0)$ *e* $\pi_1(Y, y_0)$ *não são isomorfos, então não existe homeomorfismo* $f : X \to Y$ *tal que* $f(x_0) = y_0$*.*

1. Mostre que se X é contrátil para a função constante igual a $x_0 \in X$ e a homotopia preserva o ponto x_0, então o grupo fundamental de X sobre o ponto x_0 é trivial.
2. Seja $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Mostre que $\pi_1(X,(1,0))$ e $\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ são isomorfos.
3. Seja X conexo por caminhos. Sejam $x_0, x_1 \in X$. Mostre que $\pi_1\left(X, x_0\right)$ é isomorfo a $\pi_1\left(X, x_1\right)$.

Vamos apresentar nessa seção uma prova de que o grupo fundamental de S^1 não é trivial.

Vamos mostrar que o laço $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ não é homotópico ao laço constante $(1, 0)$.

Vamos fazer isso de uma forma um pouco indireta. Basicamente, a ideia será construir uma versão finita do problema e mostrar que tal versão finita não é trivial. No final, vamos mostrar que a trivialidade do caso contínuo implicaria na trivialidade do caso finito, obtendo assim o resultado.

Começamos com 4 pontos A, B, C, D e uma noção de adjacência entre eles.

A é adjacente a B, B é adjacente a C, C é adjacente a D e D é adjacente a A - ou seja, formamos um ciclo com esses 4 pontos. Também vamos dizer que se X a adjacente a Y, então Y é adjacente a X.

Fixado um n, considere um segundo ciclo, agora com pontos nomeados de 1 a n. Vamos chamar os pontos A, B, C, D de casas, enquanto que os pontos de de 1 a n de elos. Vamos atribuir a cada elo uma casa, seguindo a seguinte regra: dois elos adjacentes precisam estar na mesma casa ou em casas adjacentes. Por exemplo, uma configuração válida seriam todos os elos na casa A. Outra configuração válida seria se tívessemos elos de 1 a 8 e com a seguinte posição: na casa A, elos 1 e 5 ; casa B, elos 2 e 6 ; casa C, elos 3 e 7 ; casa D, elos 4 e 8 - é importante lembrar aqui que as casas A e D são adjacentes, assim como os elos 1 e 8 .

Dada uma configuração válida, chamamos de um movimento a troca de um único elo de uma casa para uma casa adjacente, de forma que a nova configuração continue válida. Formalmente, se $f : \{1, \ldots, n\} \to \{A, B, C, D\}$ é uma configuração válida (isto é, $f(i)$ e $f(j)$ são adjacentes se i, j são adjacentes), então $g : \{1, \ldots, n\} \to \{A, B, C, D\}$ é um movimento se g é válida e existe k tal que $f(k)$ é adjacente ou igual a $g(k)$ e $f(j) = g(j)$ para todo $j \neq k$.

Finalmente, vamos adotar como direção positiva nas casas quando se segue a ordem alfabética crescente (ou seja, sair de B para C por exemplo) ou do último para o primeiro - isto é, de D para A. Analogamente, nos elos seguimos como positiva a ordem crescente ou do último para o primeiro. Com isso, podemos atribuir um valor a cada par adjacente de elos numa configuração: se (i, j) são adjacentes e na direção positiva (isto é, $j = i + 1$ ou $i = n$ e $j = 1$), o valor da de (i, j) é dado por

$$\operatorname{val}(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ se } (f(i), f(j)) \text{ tem direção positiva} \\ 0 \text{ se } f(i) = f(j) \\ -1 \text{ se } (f(i), f(j)) \text{ tem direção negativa} \end{cases}$$

Assim, dada uma configuração válida, podemos atribuir a ela um valor.

Definição 6

Seja $f : \{1, \ldots, n\} \to \{A, B, C, D\}$ *uma configuração válida. O valor de* f *é a soma dos valores de todos os pares adjacentes considerados na direção positiva.*

Exemplo 7

Se $f(i) = A$ *para todo* i*, o valor de* f *é 0 . Já se* $f(1) = A$*,* $f(2) = B, f(3) = C$ *e* $f(4) = D$*, o valor de* f *é 4 .*

A chave para o nosso resultado é que o valor de uma configuração é invariante por movimentos.

Proposição 8

Se g é um movimento de f, então o valor de g é o mesmo de f.

Demonstração. Se $f = g$ não há nada a se provar. Seja então k o único tal que $f(k) \neq g(k)$. Vamos indicar por k_-e k_+os dois elos adjacentes a k, de forma que k_-, k e k_+esteja na direção positiva. Note que $f(k)$ precisa ser adjacente a $f(k_-)$ e $f(k_+)$. Da mesma forma $g(k)$ também precisa ser adjacente a $g(k_-) = f(k_-)$ e $g(k_+) = f(k_+)$. Disso concluímos que $f(k_-)$ e $f(k_+)$ são adjacentes ou iguais entre si. Vamos analisar um dos casos, deixandos os demais como exercício: vamos supor que os dois são adjacentes e, portanto, $f(k)$ é igual a algum deles. Vamos ver o caso em que $f(k) = f(k_-)$, o outro é análogo. Nos cálculos dos valores de f e g, os únicos valores que podem ser alterar são os que envolvem os de (k_-, k) e (k, k_+). No caso que estamos analisando, $val_f(k_-, k) = 0$ e $val_f(k, k_+) = 1$. Já com relação a g, note que o único valor possível para $g(k)$ é $g(k_+) = f(k_+)$. Assim, os valores são $\mathrm{val}_g(k_-, k) = 1$ e $\mathrm{val}_g(k, k_+) = 0$. Logo, na somas dos valores, obtemos o mesmo resultado.

Dizemos que uma configuração é crescente se todas as adjacências têm valor 0 ou 1. Note que, assim, uma configuração válida não constante e crescente, tem valor estritamente positivo. Com isso, obtemos:

Proposição 9

Não existe uma sequência de movimentos entre uma configuração válida constante e uma válida crescente e não constante.

Demonstração. Basta notar que o valor é invariante por movimentos.

Isso termina a prova do caso finito. Vamos agora ver a relação entre o caso contínuo e o caso finito.

No que se segue, vamos supor $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ uma homotopia entre duas curvas fechadas f e g. Divida S^1 em quatro pedaços contínuos e fechados, cada um de comprimento um quarto da circunferência - desta forma, cada dois pedaços têm ou um ponto em comum, ou são disjuntos. Faça a divisão de forma que o ponto $(1,0)$ fique bem no centro de um desses pedaços e chame tal pedaço de A. Seguindo em sentido anti-horário, chame os seguintes de B, C e D. Note que se definimos que dois pedaços são adjacentes se possuem um ponto em comum e que a direção positiva é a anti-horária, estamos em situação similar à anterior. Seja $\Delta = \inf\{d(a,b) :\ a, b \in S^1$ e estão em casas não adjacentes $\}$. Note que $\Delta = \frac{\pi}{2} > 0$.

Pela continuidade uniforme de H, existe $r > 0$ tal que $d(H(x), H(y)) < \Delta$ se $d(x, y) < r$.

Podemos quadricular $[0,1] \times [0,1]$ como um tabuleiro de xadrez, de forma que cada casa tenha lado pequeno suficiente de forma que a união de duas casas adjacentes tenha diâmetro menor de que r (estamos contando que casas que dividam um único ponto já sejam adjacentes - ou seja, uma casa do "meio" do tabuleiro tem 8 casas adjacentes).

Juntando essas informações, obtemos:

Proposição 10

Se $a, b \in [0,1] \times [0,1]$ *estão em casas adjacentes (ou iguais),* $H(a)$ *e* $H(b)$ *também estão em casas adjacentes ou iguais.*

Demonstração. Como a, b estão em casas adjacentes, $d(a,b) < r$. Assim, $d(H(a), H(b)) < \Delta$ e, portanto, temos o resultado pela definição de Δ.

Vamos agora destacar um ponto para cada casa de $[0,1] \times [0,1]$. Se a casa não está na borda do quadriculado, tomamos seu ponto central. Se algum dos lados da casa é faz parte da borda do tabuleiro, tomamos o ponto de forma que esteja em tal borda (se a casa não estiver em duas bordas, deixe a outra coordenada de forma central). Assim, na casa inferior esquerda, o ponto tomado é $(0,0)$. Já na casa à direita dessa, o ponto tomado é $\left(\frac{3l}{2}, 0\right)$ onde l é o tamanho do lado das casas.

Agora temos apenas finitos pontos destacados em $[0, 1] \times [0, 1]$. Além disso, dados dois desses pontos em casas adjacentes, suas imagens também são levadas em casas adjacentes em S^1.

Pela construção, as imagens dos pontos destacados no eixo x formam uma configuração válida em S^1. Se supormos que $H(\cdot, 0)$ é a função $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, temos que tal configuração é crescente e não constante. Agora, se supormos que $H(\cdot, 1)$ é uma função constante, temos que a configuração dada pela imagem dos pontos em $\{(x, 1) : 0 \leq x \leq 1\}$ é uma configuração constante.

Intuitivamente, temos que cada linha horizontal de casas de $[0, 1] \times [0, 1]$ induz uma configuração válida em S^1. Além disso, tomando uma linha fixada, podemos considerar uma nova região como tendo todas as colunas exatamente iguais à anterior, com uma única delas escolhendo a casa imediatamente acima da original. Como tal nova casa é adjacentes às anteriores, a imagem da nova configuração é um movimento válido da configuração original. Assim, "subindo" a região, uma casa por vez, da mais baixa linha horizontal, até a mais alta linha horizontal, temos uma sequência válida de movimentos, entre a primeira configuração e a última. Assim, é impossível existir H de forma que $H(\cdot, 0)$ é a função $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ e $H(\cdot, 1)$ é uma função constante.

Nesta seção, vamos apresentar uma técnica para se determinar grupos fundamentais. Como exemplo, vamos determinar o grupo fundamental de S^1.

Definição 11

Sejam $(X, \tau), (\tilde{X}, \rho), (Y, \sigma)$ *espaços topológicos. Seja* $p : \tilde{X} \to X$ *uma função contínua. Sejam* $f : Y \to X$ *e* $g : Y \to \tilde{X}$ *funções contínuas. Dizemos que* *g é um levantamento de f* *se* $f = p \circ g$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}
$$

Espaço de recobrimento

Exemplo 12

Considere $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}, p : \mathbb{R} \to S^1$ *dada por* $p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$*. Dado* $z \in \mathbb{Z}$*, seja* $\omega_z : [0,1] \to S^1$ *dada por* $\omega_z(t) = (\cos(2\pi z t), \operatorname{sen}(2\pi z t))$*. Note que* $\tilde{\omega}_z : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $\tilde{\omega}_z(t) = zt$ *é um levantamento de* ω_z*.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\omega}_z"] \arrow[r, "\omega_z"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Definição 13

Dado um espaço (X, τ), chamamos de um espaço de recobrimento um espaço $(\tilde{X}, \rho)$ e uma função $p : \tilde{X} \to X$ tais que, para todo $x \in X$, existe A aberto tal que $x \in A, p^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} A_i$ onde cada A_i é aberto, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $p_i = p|_{A_i}$ é um homeomorfismo.

Vamos abusar da notação e, quando dissermos que $p : \tilde{X} \to X$ é um espaço de recobrimento, estaremos indicando que a situação acima ocorre incluindo aí os homeomorfismos $p_i : A_i \to A$.

Exemplo 14

Note que, no exemplo anterior, temos que $\mathbb{R}$ e p formam um espaço de recobrimento para S^1.

Proposição 15

Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $\varphi : Y \to X$ uma função contínua e sejam $f, g : Y \to \tilde{X}$ levantamentos para φ. Então $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ é aberto.

Demonstração. Seja $D = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$. Seja $y \in D$. Seja A aberto em X tal que $p(f(y)) \in A$ e seja A_i aberto homeomorfo a A contendo $f(y)$. Pela continuidade de f e g, existem abertos V e W tais que $f(V), g(W) \subset A_i$ e $y \in V, W$. Vamos mostrar que $V \cap W \subset D$ (note que isso prova o que desejamos). De fato, seja $z \in V \cap W$. Temos que

$$p(f(z)) = \varphi(z) = p(g(z)).$$

Como $f(z), g(z) \in A_i$, aplicando p_i^{-1} dos dois lados da equação, obtemos $f(z) = g(z)$ como queríamos.

Corolário 16

Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento onde X é de Hausdorff. Seja $\varphi : Y \to X$ uma função contínua onde Y é um espaço conexo. Se $f, g : Y \to \tilde{X}$ são dois levantamentos para φ tais que existe algum $y \in Y$ tal que $f(y) = g(y)$, então $f = g$.

Demonstração. Seja $D = \{d \in Y : f(d) = g(d)\}$. Pelo resultado anterior, D é aberto. Se mostrarmos que D é fechado, teremos o resultado pela conexidade de Y. Note que podemos usar o fato que $\tilde{X}$ é de Hausdorff (veja exercício 2 na lista a seguir) e já concluir o resultado (neste caso é simples mostrar que $Y \setminus D$ é aberto). Alternativamente, segue a demonstração diretamente. Seja $y \in Y \setminus D$. Então $f(y) \neq g(y)$. Seja A como na definição de espaço de recobrimento tal que $p(f(y)) \in A$. Note que, como f e g são levantamentos de $\varphi, p(f(y)) = \varphi(y) = p(g(y))$. Assim, existem A_i e A_j distintos tais que $f(y) \in A_i$ e $g(y) \in A_j$. Pela continuidade de f e g, existem abertos V e W em Y tais que $f(V) \subset A_i$ e $g(W) \subset A_j$ com $y \in V \cap W$. Note que, como $A_i \cap A_j = \emptyset, (V \cap W) \cap D = \emptyset$ como queríamos.

Nosso próximo objetivo é mostrar que é possível levantar homotopias.

Lema 17

Seja $p : \tilde{X} \to X$ *um espaço de recobrimento. Seja* $f : Y \to X$ *uma função contínua. Seja* C *conexo de* Y *tal que* $f(C) \subset A$ *para algum* A *da definição de espaço de recobrimento. Se* $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ *é um levantamento para* f*, então* $\tilde{f}(C) \subset A_i$ *para algum* i*.*

Demonstração. Como $\tilde{f}$ é levantamento, temos que $\tilde{f}(C) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Como os A_i 's são dois a dois disjuntos e $\tilde{f}(C)$ é conexo, temos o resultado.

Lema 18

Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua. Sejam $V, W \subset Y$ abertos e $\tilde{f} : V \to \tilde{X}$ levantamento para $f\,|_V$. Seja W tal que:

(a) *$f(W) \subset A$, onde A é um dos abertos como na definição de espaço de recobrimento.*

(b) *$V \cap W$ é conexo e não vazio.*

Então $\tilde{f}$ admite uma extensão contínua para $V \cup W$ que é um levantamento para $f\,|_{V \cup W}$.

Demonstração. Seja $\tilde{y}_0 \in V \cap W$. Como $f(y_0) \in A$, existe A_i como na definição de espaço de recobrimento tal que $\tilde{f}(y_0) \in A_i$. Defina $\tilde{g} : W \to \tilde{X}$ como $p_i^{-1} \circ f$. Pelo lema anterior, $\tilde{f}(V \cap W) \subset A_i$. Logo, $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ coincidem em $V \cap W$ e, portanto, podemos estender $\tilde{f}$ aos valores de $\tilde{g}$ (veja o exercício 3 da lista a seguir).

Proposição 19

Seja $p : \tilde{X} \to X$ *um espaço de recobrimento. Seja* $f : [0,1] \times [0,1] \to X$ *uma função contínua. Dado* $y_0 \in [0,1] \times [0,1]$*e fixado* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ *tais que* $p(\tilde{x}_0) = f(y_0)$*, existe um único levantamento* $\tilde{f} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ *tal que* $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$*.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos básicos de $[0,1] \times [0,1]$ tal que, para cada $C \in \mathcal{C}, f(C) \subset A^C$ onde A^C é um dos abertos como na definição de espaço recobrimento. Seja r um número de Lebesgue para tal cobertura. Sejam $Q_1, \ldots, Q_n$ quadrados abertos de mesmo diâmetro menor que r que cubram $[0,1] \times [0,1]$ e de forma que

$$\left(\bigcup_{i \leq j} Q_i \right) \cap Q_{j+1}$$

é não vazio e conexo e que $y_0 \in Q_1$. Pelo diâmetro de Q_1, existe A como na definição de espaço de recobrimento tal que $f(Q_1) \subset A$. Seja A_i o aberto homeomorfo a A via p tal que $\tilde{x}_0 \in A_i$. Se definirmos $\tilde{f}_1 : Q_1 \to \tilde{X}$ como $p_i^{-1} \circ f\mid_{Q_1}$, temos que $\tilde{f}$ é um levantamento para f em Q_1.

Podemos estender $\tilde{f}_1$ para $\tilde{f}_2 : Q_1 \cup Q_2 \to \tilde{X}$, pelo lema anteriror. Prosseguindo assim, obtemos $\tilde{f} = \tilde{f}_n$ o levantamento desejado. Tal levantamento é único pelo Corolário 16.

De maneira análoga ao resultado anterior, podemos provar o seguinte.

Proposição 20

Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : [0,1] \to X$ uma função contínua. Dado $y_0 \in [0,1]$ e fixado $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ tal que $p(x_0) = f(y_0)$, existe um único levantamento $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Com tudo isso, agora podemos provar que levantamentos de homotopias de caminhos existem e são únicos:

Teorema 21

Seja $p : \tilde{X} \to X$ *um espaço de recobrimento. Seja* $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ *uma homotopia entre os caminhos* $H(\cdot, 0)$ *e* $H(\cdot, 1)$*. Dado* $y_0 \in [0,1] \times [0,1]$ *e fixado* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ *tal que* $p(\tilde{x}_0) = H(y_0)$*, existe um único levantamento* $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ *tal que* $\tilde{H}(y_0) = \tilde{x}_0$*. Além disso,* $\tilde{H}$ *é uma homotopia entre os caminhos* $\tilde{H}(\cdot, 0)$ *e* $\tilde{H}(\cdot, 1)$*.*

Demonstração. Já temos que existe $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ um único levantamento para H como no enunciado. Resta mostrar que é, de fato, uma homotopia de caminhos. Isto é, resta mostrar que $\tilde{H}(0, \cdot)$ e $\tilde{H}(1, \cdot)$ são constantes. Vamos provar o caso para $\tilde{H}(0, \cdot)$ e o outro é análogo. Note que, como H é homotopia de caminhos, $H(0, \cdot)$ é constante. Seja A aberto como na definição espaço de recobrimento tal que $H(0,0) \in A$. Note que $\tilde{H}(\{0\} \times [0,1])$ é conexo e, portanto, está contido num único A_i. Como $\tilde{H}$ é levantamento, $\tilde{H}(0, \cdot)$ é constante.

Vamos terminar esta seção, determinando o grupo fundamental de S^1. Lembrando o que fizemos no início da seção, temos que, para cada $z \in \mathbb{Z}$, $\omega_z(t) = (\cos(2\pi zt), \operatorname{sen}(2\pi zt))$. Informalmente, temos que cada ω_z dá "z" voltas em S^1 - indicando-se por voltas positivas as em sentido anti-horário e por negativas as em sentido horário. Note também que $\omega_{a+b} \simeq \omega_a * \omega_b$ (exiba a homotopia). Ou seja, essas funções se comportam como $\mathbb{Z}$ com a soma. Vamos provar exatamente isso.

Teorema 22

$\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ *é isomorfo ao grupo* $(\mathbb{Z},+)$ *e é gerado por* $[\omega]=[\omega_1]$.

Demonstração. Vamos mostrar que cada laço em $x_0=(1,0)$ é homotópico a algum ω_z e que ω_z e ω_s não são homotópicos se $z\neq s$.

Daí o resultado segue se definirmos $\varphi:\pi\left(S^1,x_0\right)\to\mathbb{Z}$ por $\varphi(f)=z$, onde z é o único tal que $[f]=[\omega_z]$

Seja $f:[0,1]\to S^1$ um laço em x_0. Seja $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ um levantamento para f com $\tilde{f}(0)=0$ (dada pela Proposição 20).

Note que $\tilde{f}(1)=z\in\mathbb{Z}$, pois $p^{-1}[(1,0)]=\mathbb{Z}$. Assim, note que $\tilde{f}$ é homotópica a $\tilde{\omega}_z$ via $(\tilde{H}:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R})$

$$\tilde{H}(s,t)=(1-t)\tilde{f}(s)+t\tilde{\omega}_z(s)$$

Aplicando p a esta homotopia, obtemos que $[f] = [\omega_z]$.

Resta mostrar a unicidade.

Suponha $[\omega_z] = [\omega_s]$. Seja $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ homotopia entre ω_z e ω_s. Então, pelo Teorema 21, obtemos que existe $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ levantamento para F tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$. Note que, assim, $\tilde{F}(\cdot, 0)$ é um levantamento para ω_s e $\tilde{F}(\cdot, 1)$ é um levantamento para ω_z. Pela unicidade (Corolário 16), temos que $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{\omega}_z$ e $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{\omega}_s$. Finalmente, temos que $\tilde{F}$ é homotopia de caminhos, logo $\tilde{F}(1, \cdot)$ é constante. Assim

$$z = \tilde{\omega}_z(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\omega}_s(1) = s.$$

1. Mostre que S^1 não é contrátil.
2. Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Mostre que se X é de Hausdorff, então $\tilde{X}$ também é.
3. Sejam $f : V \to Y$ e $g : W \to Y$ funções contínuas onde $V, W \subset X$ são abertos e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V \cap W$. Mostre que $h : V \cup W \to Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ g(x) & \text{se } x \in W \end{cases}$$

é contínua.
4. Mostre que $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ não é contrátil.

5. Considere $D^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$. Este é um roteiro para mostrar o Teorema do ponto fixo de Brouwer: Seja $f : D^2 \to D^2$ uma função contínua. Então f tem ponto fixo.

   (a) Suponha que não. Para cada x, defina $F(x)$ igual ao (único) ponto de S^1 que está na intersecção da semi-reta iniciada em x e que passa por $f(x)$ (e que é diferente de x). Faça um desenho e se convença que F é contínua.
   (b) Note que F é uma retração de deformação.
   (c) Conclua que D^2 e S^1 são homotopicamente equivalentes e obtenha uma contradição.