IOF1223 - CGO **Prova I 2023** Nome:______________________

Informações:

- Rascunho só no verso da prova (não será avaliado).
- Só avalio o que consigo ler.
- Vá ao banheiro antes da prova começar.
- Pode comer e beber em silêncio.

Violação destas regras anulará a prova:

- Não consulte material ou colegas.
- Desligue e guarde o celular.
- Sente virado/a para frente, em silêncio.
- Não escreva na carteira.

♠

1. Considere a equação da **conservação de vorticidade** potencial no modelo barotrópico, de fluido homogêneo, incompressível e invíscido: $\frac{D}{Dt}\left(\frac{f+\zeta}{H}\right) = 0$. Suponha que o centroide do Giro subtropical do Atlântico Sul estava em 25°S e se moveu 0.5° para o sul no último século. A vorticidade relativa média no giro era inicialmente $3 \times 10^{-7}\text{s}^{-1}$. Por causa desse movimento, a profundidade média sob o giro aumentou 1%, de 5000 m para 5050 m. Qual foi a variação percentual de vorticidade relativa? 10

Resposta:

$$\frac{f_2+\zeta_2}{H_2} = \frac{f_1+\zeta_1}{H_1} \quad \Rightarrow \quad f_2+\zeta_2 = (f_1+\zeta_1)\frac{H_2}{H_1} \quad \Rightarrow \quad \zeta_2 = (f_1+\zeta_1)\frac{H_2}{H_1} - f_2$$

Por incrível que pareça, substituindo os valores obtemos ζ_2 279% maior que ζ_1.

2. **Faça a análise de escala** da componente zonal da equação de Navier-Stokes onde p é a anomalia de pressão:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{1} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{2} + \cdots = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{3} + \underbrace{fv}_{4} - \underbrace{2\Omega\cos\theta w}_{5} + \underbrace{A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{6} + \cdots$$

Use valores típicos do Kuroshio: a corrente é de 1 m/s, a largura dela é 100 km, ela muda significativamente em 10 dias, a velocidade vertical é de 10 m/dia e o coeficiente de viscosidade turbulenta é 10^5 m^2/s. O *desnível* entre os dois lados do Kuroshio é de η =1 m.

Dica: Use hidrostática para obter a escala da pressão.

(a) Escreva numa linha cada um dos seis termos em termos das dimensões U, T, L, η e W. As outras variáveis (ρ, f, Ω e A_x) podem ser substituídas pelo seu valor numérico aproximado. Na próxima linha escreva o valor aproximado de cada um dos seis termos na forma $[10^n]$. 5

Resposta:

$$\frac{U}{T} + \frac{U^2}{L} + \cdots = 10\frac{\eta}{L} + 10^{-4}U + 10^{-4}W + 10^5\frac{U}{L^2} + \cdots$$
$$10^{-6} + 10^{-5} + \cdots = 10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-8} + 10^{-5}$$

(b) Complete: Os termos **3** e **4** da equação formam o balanço de maior ordem, $O[10^{\mathbf{-4}}]$. Esse é o balanço **geostrófico** onde a força **do gradiente de pressão** e a força **de Coriolis** se equilibram. 5

(c) Complete: O balanço de 2ª ordem (os vice-maiores) é formado por termos de ordem $O[10^{\mathbf{-5}}]$. O termo **6**, chamado de **viscoso**, controla a **turbulência** gerada pelo termo **2**, que chamamos de **não-linear**. 5

3. Já vimos que contornos de anomalia de pressão p coincidem com linhas de corrente ψ se adotarmos o plano-f **no modelo geostrófico. Demonstre** que no plano-β isso não acontece. 15

Dica: Contornos de a e c coincidem quando a e c tem uma relação linear, ou seja $a = \alpha c + \gamma$ com α e γ constantes.
Dica²lculo: Quando fazemos $\int f(x,y)dx$ e sobra uma "constante" que é um $g(y)$. Se fizermos $\int f(x,y)dy$ a "constante" será um $h(x)$. O único jeito de fazer $g(y) = h(x)$ é se ambas forem constantes.

Resposta:

Substituindo
$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$
em
$$-fu = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad fv = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$
resulta em
$$f\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad f\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Para obtermos uma relação entre ψ e p basta integrar. A equação em x é trivial, f não depende de x:

$$f\int\frac{\partial\psi}{\partial x}dx = \frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial p}{\partial x}dx, \quad f\psi = \frac{p}{\rho_0}+C(y), \quad \psi = \frac{p}{\rho_0 f}+C(y),$$ que é linear se $C(y)$ for constante.

A equação em y não é trivial, pois $f = f_0 + \beta y$:

$$\int(f_0+\beta y)\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial p}{\partial y}dy, \quad \int f_0\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \int\beta y\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \frac{1}{\rho_0}\int\frac{\partial p}{\partial y}dy,$$

o termo em f é igual ao caso anterior: $\int f_0\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = f_0\int\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = f_0\psi + C_1(x)$.

temos que integrar o termo em β por partes: $\beta\int y\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \beta\psi y - \int\beta\psi dy + C_2(x)$.

Juntando os 2 termos: $$\int f_0\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \int\beta y\frac{\partial\psi}{\partial y}dy = (f_0+\beta y)\psi - \beta\int\psi dy = \frac{p}{\rho_0 f} + C_3(x).$$

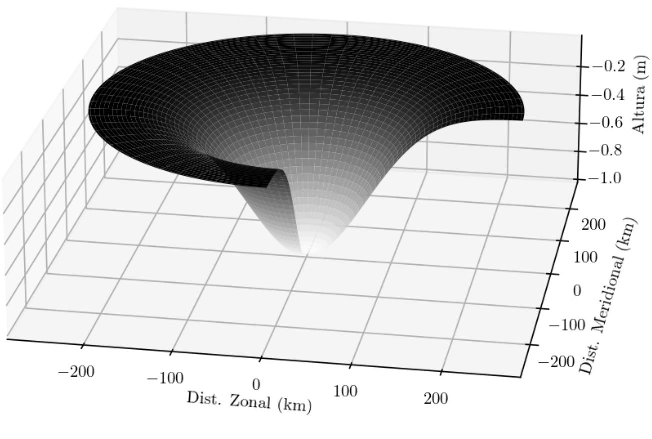
$C(y) = C_3(x)$ implica que as duas funções são constantes. Porém a relação só se torna linear se β for zero, caso contrário vai depender de y.

4. Na figura abaixo a superfície reticulada marca a altura dinâmica η da superfície sobre um vórtice circular que está em latitudes médias do Hemisfério Sul e é estacionário. A vista em corte foi feita para facilitar o entendimento.

   (a) Observe o formato da superfície. Pode ser um vórtice em rotação de corpo sólido? $\surd$ **não** ◯ sim. $\boxed{5}$

   (b) A vorticidade relativa do vórtice é ◯ positiva $\surd$ **negativa.** $\boxed{5}$

   (c) Voltando um pouco no tempo, se o vórtice foi criado pelo **transporte de Ekman**, a configuração de $\vec{\tau}$ deve ter sido tal que a vorticidade do vento era $\surd$ **negativa** ◯ positiva. $\boxed{5}$



5. No modelo **quasi-geostrófico**, a convergência horizontal é dada pela equação ao lado. Complete as afirmações a seguir, desenvolvendo matematicamente os termos citados:

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{1.} = \frac{1}{\rho_0 f_0^2}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2 p}_{2.} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 f_0} J\left(p, \nabla_h^2 p\right)}_{3.} + \underbrace{\beta_0 \frac{\partial p}{\partial x})}_{4.}\right].$$

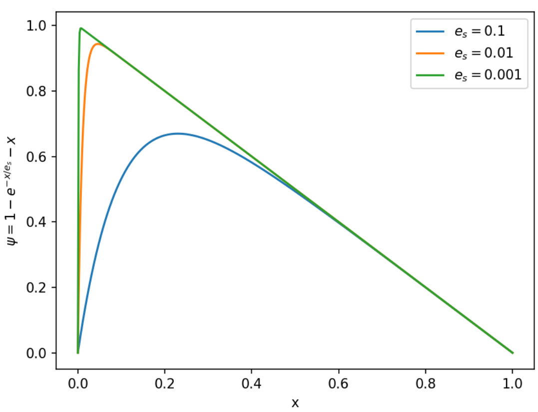
(a) O termo __2__ contém a variação temporal da vorticidade relativa ζ; $\boxed{10}$

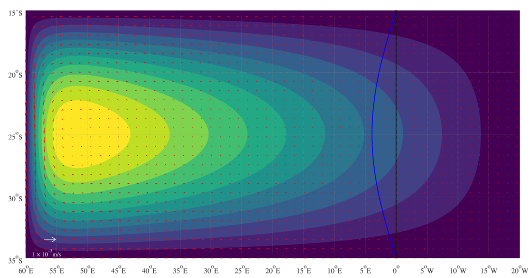
Resposta:
$\nabla_h^2 p = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}$; o termo antes dos colchetes inclui $\frac{1}{\rho_0 f_0}$. Jogando isso para dentro do Laplaciano reconhecemos $\zeta = \dfrac{\partial v_g}{\partial x} - \dfrac{\partial u_g}{\partial y}$ onde $_g$ indica geostrofia; desta forma temos $\dfrac{\partial \nabla_h^2 p}{\partial t} \propto \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}$.

(b) O termo __3__ quantifica a advecção de ζ; $\boxed{10}$

Resposta:
Da definição de Jacobiano, $J(p, \nabla_h^2 p) = \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial \nabla_h^2 p}{\partial y} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial \nabla_h^2 p}{\partial x}$. Do item acima, $\nabla_h^2 p = \rho_0 f_0 \zeta$; usando a geostrofia $J(p, \nabla_h^2 p) = v_g \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} + u_g \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ quantifica o fluxo advectivo horizontal de ζ.

6. A parte dependente de x da solução adimensional do **modelo de Stommel**, $\psi = 1 - e^{-x/\epsilon_s} - x$, está desenhada abaixo e à esquerda para 3 valores de ϵ_S. Cada linha seria o corte horizontal central de uma figura similar à da direita. À propósito, a curva mais suave é a de $\epsilon_S = 0.1$ e a mais pontuda é a de $\epsilon_S = 0.001$.





(a) Quais são os três problemas que o modelo de Stommel resolveu em relação ao **modelo de Sverdrup**? $\boxed{5}$

Resposta:
Conservação de energia no modelo todo: o vento insere e a corrente de borda oeste retira por causa da viscosidade. Conservação de massa na borda oeste: não há fluxo $\perp$ a $x = 0$. Conservação de vorticidade: A vorticidade de estiramento colocada pelo bombeamento de Ekman é transformada em relativa na borda oeste.

(b) Explique qual parte da solução de Stommel é quase idêntica à de Sverdrup. Para isso use uma fórmula de ψ e comente as 3 curvas do gráfico da esquerda. $\boxed{5}$

Resposta:
Sverdrup vai só até $\psi = 1 - x$, uma reta, que aparece na curva de $\epsilon_S = 0.1$ perto de $x = 0.5$, na curva de $\epsilon_S = 0.01$ perto de $x = 0.05$, e na curva de $\epsilon_S = 0.001$ perto de $x = 0.005$.

(c) O que representa fisicamente ϵ_S? 5

Resposta:
A largura da corrente de borda oeste - no caso, não-dimensionalizada.

7. Ao fazer a **decomposição de Reynolds** postulamos uma equivalência formal entre uma propriedade do fluxo e uma propriedade da matéria, formalizada aqui para a direção $\hat{x}$:

$$\begin{cases} -u'u' &= A_x \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ -u'v' &= A_y \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ -u'w' &= A_z \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Em relação às fórmulas 1, complete: A propriedade da matéria é ______**o stress viscoso**______, representada pelos termos do lado ____**direito**____ das equações (1). 5
A propriedade do fluxo é ____**a correlação entre as anomalias de velocidade**____, representada pelos termos do lado ____**esquerdo**____ das equações (1).

(b) Complete com $\ll, \simeq$ ou $\gg$: $A_x \underline{\simeq} A_y \underline{\gg} A_z$. 5

♠

MEMENTO SEMPER

Função de corrente:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Jacobiano: $J(a,b) = \dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial y} - \dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial x}$

Laplaciano: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Rotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$

Geostrofia em coords. retangulares:

$$fv = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$-fu = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Integral por partes, com $u(x,y)$, $v(x,y)$ $\displaystyle\int u\frac{\partial v}{\partial x}dx = uv - \int v\frac{\partial u}{\partial x}dx + C(y)$

Questão	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos	10	15	15	15	20	15	10	100
Nota								