E3) Seja $F = R_{O,\alpha}$, $\alpha = \frac{2\pi}{10}$. a) Verifique que $\mathcal{G} = [F]$
L5) é um grupo cíclico finito com 10 elementos

$$\mathcal{G} = \{F, F^2, \dots, F^n, \dots\} \quad F^n = \overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n \text{ vezes}}$$

$$F = R_{O,\frac{2\pi}{10}} \quad F^2 = R_{O,\frac{2\pi}{10}} \circ R_{O,\frac{2\pi}{10}} = R_{O,\frac{4\pi}{10}} \text{ etc} \dots$$

$$R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} = R_{O,\alpha+\beta}$$

Esquematicamente:

$F : \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$F^2 : 4\pi/10 = \frac{2\pi}{5}$

$F^3 : \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$

$F^4 : \frac{8\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$

$F^5 : \frac{10\pi}{10} = \pi$

$F^6 : \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5}$

$F^7 : \frac{14\pi}{10} = \frac{7\pi}{5}$

$F^8 : \frac{16\pi}{10} = \frac{8\pi}{5}$

$F^9 : \frac{18\pi}{10} = \frac{9\pi}{5}$

$F^{10} : \frac{20\pi}{10} = 2\pi$

$2\pi \equiv 0$ e $\therefore$ $F^{10} = Id$. Daí $F^{11} = F$ $F^{12} = \dots$

Logo $\mathcal{G} = \{F, F^2, \dots, F^{10}\}$ é grupo c/ 10 elementos

b) $[F^3] = ?$

Seja $G = F^3$ Então $G^2 = F^6$ $G^3 = F^9$

$G^4 = F^{12} \therefore \frac{24\pi}{10} \equiv \frac{2\pi}{5} \dots G^4 = F^2$ $G^5 = F^5$

$G^6 = F^8$ $G^7 = F$ $G^8 = F^4$ $G^9 = F^7$

$G^{10} = F^{10}$.

Comparando com a lista de $[F]$

Temos $[F^3] = [F]$.

Analogamente ...

E4 L5 | Mostre que as circunferências com centro O são invariantes pelas rotações $R_{O,\alpha}$, para qualquer ângulo α.

Seja S a circunferência de centro O e raio r.

Para todo $P \in S$ temos $OP = r$.

Por definição $P' = R_{O,\alpha}(P) \iff \begin{cases} OP' = OP \\ \text{e} \\ \measuredangle \overset{\frown}{POP'} = \alpha \end{cases}$

$OP' = OP \Rightarrow P' \in S$ e $\therefore R_{O,\alpha}(S) \subset S$ ①

Para a inversa $R_{O,-\alpha}$ vale, analogam/

$R_{O,-\alpha}(S) \subset S$.

e $\therefore S = R_{O,\alpha} \circ R_{O,-\alpha}(S) \subset R_{O,\alpha}(S)$ ②

De ① e ② $R_{O,\alpha}(S) = S$ ou seja:

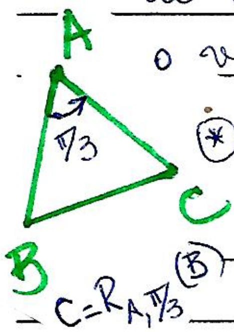
S é invariante por $R_{O,\alpha}$.

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

E5 L5 Encontre um triângulo equilátero cujos vértices pertençam a três retas paralelas distintas

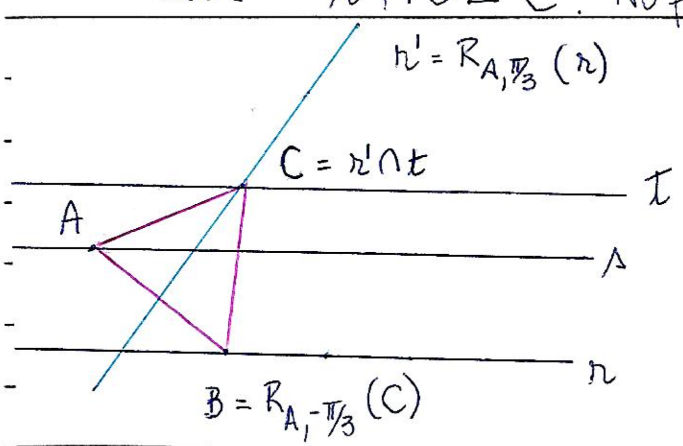
Queremos: ΔABC triângulo equilátero
Dados: Três retas paralelas $r \parallel s \parallel t$.

• Trata-se de um problema em que a solução fica caracterizada pelo uso de uma rotação, pois: i) os ângulos de um triângulo equilátero são iguais a $\pi/3$ e ii) a rotação de $\alpha = \pi/3$ em torno de um vértice, digamos o vértice A, leva o vértice B no vértice C (ou a rotação de âng $-\alpha$ leva C em B). (*)



Assim sendo:
Escolhido o ponto $A \in s$, devemos ter: $B \in r$ e $C \in t$ tq $C = R_{A,\pi/3}(B)$ e, portanto, C fica bem determinado: $C \in t$ e $C \in R_{A,\pi/3}(r)$ e portanto devemos ter $C \in t \cap R_{A,\pi/3}(r)$.

• Construção: começamos construindo um Δ equilátero (*) pois precisamos de $\alpha = \pi/3$, traçamos as retas paralelas e escolhemos $A \in s$. Em seguida traçamos $r' = R_{A,\pi/3}(r)$ e encontramos $r' \cap t = C$. No final marcamos $B = R_{A,-\pi/3}(C)$.



Temos $\overline{AB} = R_{A,-\pi/3}(\overline{AC}) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{AC}$, pois $R_{A,-\pi/3}$ é isometria. $\therefore \Delta ABC$ é isósceles. Mas por construção $B\hat{A}C = \pi/3$ e segue $\hat{B} = \hat{C} = \pi/3$ Logo ΔABC é equilátero

E6 | Encontrar triângulo equilátero
L5 | cujos vértices pertencem a três circunferências concêntricas distintas.

Sejam γ_1, γ_2 e γ_3 as circunferências $\boxed{\text{dadas}}$
A mesma argumentação do E_ L5 vale aqui, ou seja: Sendo A, B, C vértices de um triângulo equilátero temos:

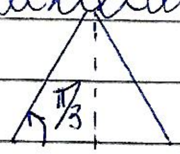
$$* \left\{ C = R_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C = R_{A,-\pi/3}(B) \right.$$

Escolhemos $A \in \gamma_2$ e se $B \in \gamma_1$ devemos ter $C \in \gamma_3$. De (*), devemos ter $C \in \left\{ \begin{array}{l} R_{A,\pi/3}(\gamma_1) \\ \text{ou } R_{A,-\pi/3}(\gamma_1) \end{array} \right.$.

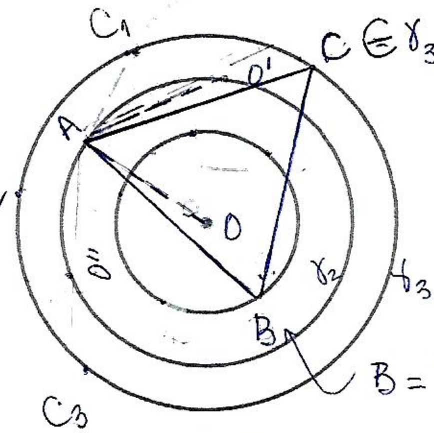
Ou seja, devemos ter $C \in \left\{ \begin{array}{l} \gamma_3 \cap R_{A,\pi/3}(\gamma_1) \\ \text{ou } \gamma_3 \cap R_{A,-\pi/3}(\gamma_1) \end{array} \right.$.

$\gamma_1' = R_{A,\pi/3}(\gamma_1)$ é a circunferência de centro $O' = R_{A,\pi/3}(O)$ e raio r_1 (raio de γ_1). Análogo p/ $R_{A,-\pi/3}(\gamma_1) = \gamma_1'' \ldots O'' = R_{A,-\pi/3}(O)$

· Construo inicialmente um triângulo equilátero auxiliar para ter um ângulo $\alpha = \pi/3$.



· Obtenho $O' = R_{A,\pi/3}(O)$ e traço $R_{A,\pi/3}(\gamma_1)$ c/ centro O' e raio r_1. Daí encontro $\gamma_3 \cap \gamma_1' = C$ e depois $B = R_{A,-\pi/3}(C) \Rightarrow AB = AC$. Por ser $\hat{A} = \pi/3$ segue ΔABC equilátero.



$C \in \gamma_3 \cap R_{A,\pi/3}(\gamma_1)$, C_1 também

ΔABC é solução.

$B = R_{A,-\pi/3}(C)$.

$\gamma_3 \cap R_{A,-\pi/3}(\gamma_1) = \{C_2, C_3\}$

$\therefore$ há + 3 soluções.

E7
L5
23

Dadas duas retas r e s, um ponto O e um ângulo de medida α, $0 < \alpha < \pi$ construir uma circunferência γ com centro O que intercepte as retas r e s nos pontos R e S respectivamente, de forma que $\measuredangle ROS$ seja igual a α.

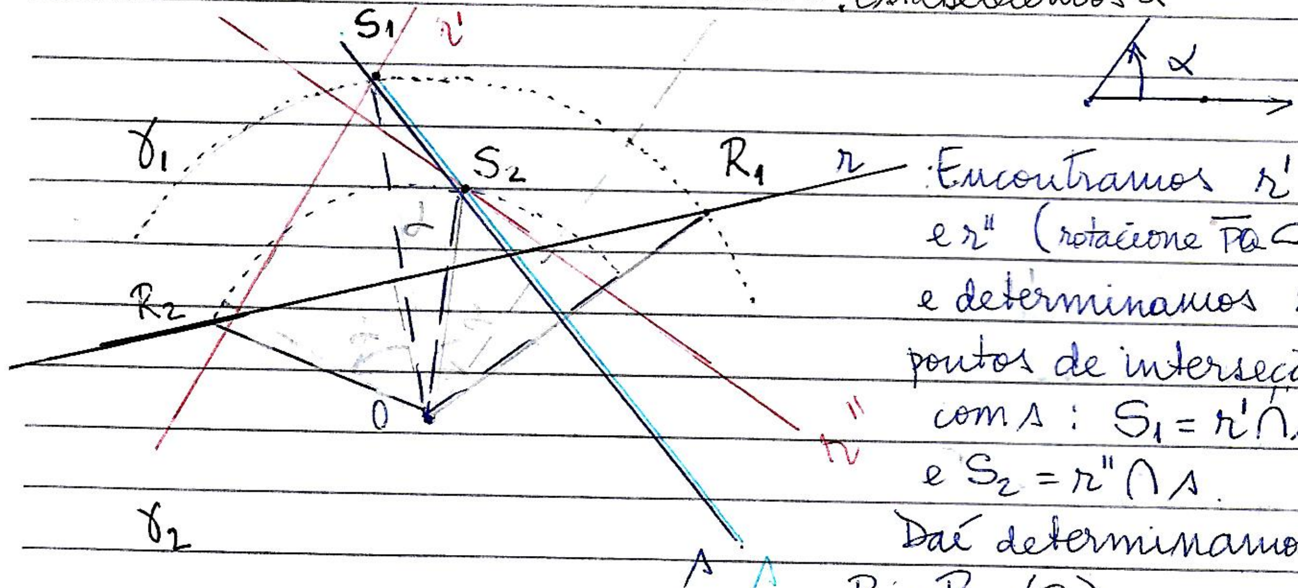
$\boxed{\text{Dados}}$ retas r e s, ângulo α, $0<\alpha<\pi$ e pt O.

$\boxed{\text{Queremos}}$ Circunferência γ c/ centro O tal que
$\gamma \cap r = R$ $\gamma \cap s = S$ com $\measuredangle ROS = \alpha$.

Ou seja: $\boxed{\text{Devemos ter}}$: $S = R_{O,\alpha}(R)$ ou
$S = R_{O,-\alpha}(R)$ e temos um pbm típico!

Devemos ter $S \in R_{O,\alpha}(r) = r'$ ou $S \in R_{O,-\alpha}(r) = r''$.

Construção: No plano marcamos pt O e traçamos r e s dadas. Estabelecemos α



Encontramos r' e r'' (rotacione $\overline{P_0} \subset r$) e determinamos 2 pontos de interseção com s: $S_1 = r' \cap s$ e $S_2 = r'' \cap s$.

Daí determinamos $R_1 = R_{O,\alpha}(S_1)$ e $R_2 = R_{O,\alpha}(S_2)$.

As duas soluções são as circunferências:

$\gamma_1 = S(O, r_1)$, raio $r_1 = OR_1 = OS_1$, $R_1 \in r$, $S_1 \in s$

e $\gamma_2 = S(O, r_2)$, raio $r_2 = OS_2 = OR_2$, $R_2 \in r$, $S_2 \in s$.

/ /

E8
L5
23

Sendo O o centro do quadrado ABCD orientado positivamente, mostrar que $R_{B,\pi/2} \circ R_{C,\pi/2} = R_O$

Seja $F = R_{B,\pi/2} \circ R_{C,\pi/2}$

$\boxed{1^{\circ}\text{ jeito}}$ Temos uma composta de rotações de centros diferentes. Pelo teorema 5.9:

$$R_{B,\pi/2} \circ R_{C,\pi/2} = R_{O_3,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = R_{O_3,\pi} = R_{O_3} = F.$$

Agora, temos $R_{C,\pi/2}(D) = B$ e $R_{B,\pi/2}(B) = B$

$\therefore R_{B,\pi/2} \circ R_{C,\pi/2}(D) = B$ ou seja: $R_{O_3}(D) = B$

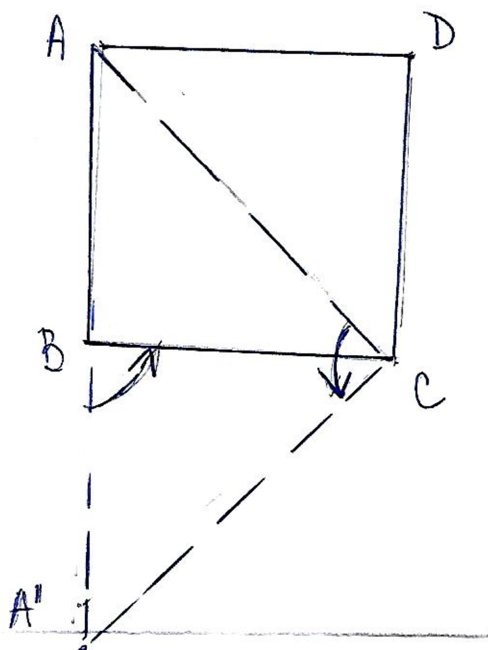
$\Rightarrow$ O_3 é ponto médio de $\overline{BD}$ $\Rightarrow O_3 = O$

$\therefore \quad F = R_O$

$\boxed{2^{\circ}\text{ jeito}}$ Temos $F(D) = B$ $F(A) = C$ e $F(C) = A$ (I)

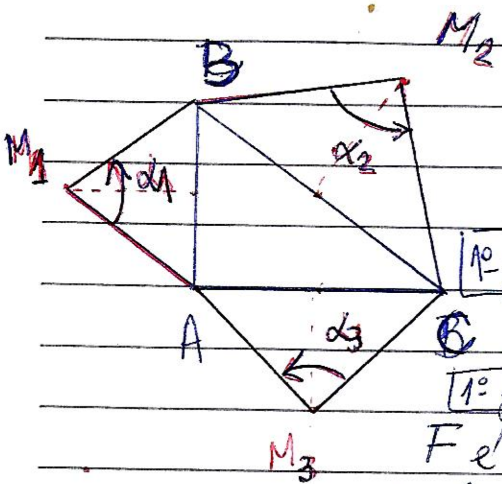
R_O também: $R_O(D) = B$, $R_O(A) = C$, $R_O(C) = A$.

$\therefore$ F e R_O são isometrias que coincidem em três pontos e, pelo teorema 2.6, segue que $F = R_O$.



$$\left.\begin{array}{l} R_{B,\pi/2} \circ R_{C,\pi/2}(D) = B \\ R_{B,\pi/2} \circ \underbrace{R_{C,\pi/2}(A)}_{A'} = C \\ R_{B,\pi/2} \circ \underbrace{R_{C,\pi/2}(C)}_{C} = A \end{array}\right\} \text{(I)}$$

E9 / L5 | Dados M_1, M_2, M_3 não colineares, $\not\preceq$s $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in]0, \pi[$ determine ΔABC / M_i = vértice de Δ isósceles construído sobre cada lado do Δ $i = 1, 2, 3$.



Supondo o pbm resolvido, seja

$F = R_{M_3,\alpha_3} \circ R_{M_2,\alpha_2} \circ R_{M_1,\alpha_1}$

$\boxed{1^{\circ}\text{ jeito}}$ $R_{M_1,\alpha_1}(A) = B$ ①

$R_{M_2,\alpha_2}(B) = C$ ②, $R_{M_3,\alpha_3}(C) = A$ ③

$\boxed{1^{\circ}\text{ jeito}}$ Aplicação do Teo 5.9

F é composta de rotações e $\therefore$ é rotação de ângulo $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ Por ① ② e ③ temos $F(A) = A$ e $\therefore$ A é pt fixo de F.

Se $\beta = 2k\pi$, F é translação $\Rightarrow \nexists$ solução.

Senão: A é o centro da composta de três rotações e fica determinado (em duas etapas) como na demonstração do Teorema 5.9.

$\boxed{2^{\circ}\text{ jeito}}$ Seja P um ponto qualquer do plano: Aplicando as 3 rotações a P, temos

$P_1 = R_{M_1,\alpha_1}(P) \overset{①}{\Longrightarrow} AP = BP_1$ c/ $\not\preceq \ldots \alpha_1$

$P_2 = R_{M_2,\alpha_2}(P_1) \overset{②}{\Longrightarrow} BP_1 = CP_2$ c/ $\not\preceq \ldots \alpha_2$

$P_3 = R_{M_3,\alpha_3}(P_2) \overset{③}{\Longrightarrow} CP_2 = AP_3$, c/ $\not\preceq \ldots \alpha_3$

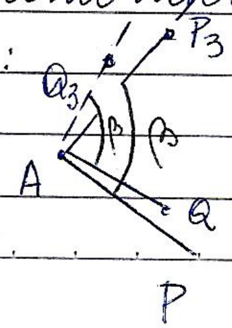
Chegamos a $AP = AP_3$ com $\not\preceq(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP_3}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$.

Se Q é outro pt ao qual aplicamos as rotações chegamos a $AQ = AQ_3$ com $\not\preceq(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ_3}) = \beta$.

Daí podemos obter A como intersecção das mediatrizes dos segmentos:

$\overline{PP_3}$ e $\overline{QQ_3}$, pois

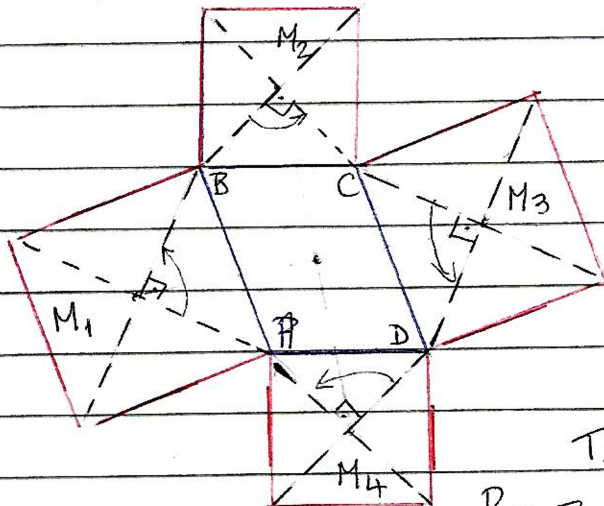
A é o centro da rotação de ~~segmen~~ ângulo β



/ /

E10 / L4 Mostre que os centros dos quadrados construídos externamente sobre os lados de um paralelogramo são vértices de um quadrado.

ABCD paralelogramo dado



Cada M_i é interseção das diagonais do quadrado correspondente. Ficam definidas 4 rotações com centro M_i e ângulo $\pi/2$.

Temos claramente

$R_{M_1,\pi/2}A = B \quad R_{M_2,\pi/2}B = C$

$R_{M_3,\pi/2}C = D \quad R_{M_4,\pi/2}D = A$

Portanto, a composta $F = R_{M_4,\pi/2} \circ R_{M_3,\pi/2} \circ R_{M_2,\pi/2} \circ R_{M_1,\pi/2}$ leva A em A. Mas a composta F é rotação de ângulo 2π e $\therefore$ $F = Id$. Agora:

$$F = \underbrace{R_{M_4,\pi/2} \circ R_{M_3,\pi/2}}_{R_{O_2,\pi} \left(\begin{array}{c} O_2 \text{ médio} \\ \text{de } M_3M_4 \end{array}\right)} \circ \underbrace{R_{M_2\pi/2} \circ R_{M_1\pi/2}}_{R_{O_1,\pi} \left(\begin{array}{c} O_1 \text{ médio} \\ \text{de } M_1M_2 \end{array}\right)} = R_{O_2} \circ R_{O_1} = Id$$

$\Longrightarrow \underline{O_1 = O_2} = O$

Mais um pouco de trabalho... $\Rightarrow O_1 = O_2 = O$.

$\Rightarrow \overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ e $M_1M_3 = M_2M_4$.

$\therefore$ $M_1M_2M_3M_4$ é paralelogramo com diagonais perpendiculares e congruentes

$\Longrightarrow M_1M_2M_3M_4$ é um quadrado.