

Mecânica Quântica I (4302403)

1º. Semestre de 2023

Prof. Sylvio Canuto

Monitores: Ana Luisa Foguel e Mateus Bergami Rocha

Lista de Exercícios Átomo de Hidrogênio

1. a) Encontre $\langle r \rangle$ e $\langle r^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. Expresse sua resposta em termos do raio de Bohr;
b) Encontre $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio;
c) Encontre $\langle x^2 \rangle$ no estado $n = 2, l = 1, m = 1$.
2. Qual é o *valor mais provável* de r no estado fundamental do hidrogênio?
3. O positrônio é um átomo exótico formado por um elétron e sua antipartícula, o pósitron, que tem carga vale $+e$ e massa igual à massa do elétron. Considere seu estado fundamental e determine o valor médio $\langle r \rangle$ expressando seu resultado em Å. Compare esse valor com aquele para o átomo de hidrogênio normal.
4. Considere o nível de energia correspondente a $n = 3$ do átomo de hidrogênio. Faça uma tabela dos possíveis valores do número quântico l , e dos possíveis valores correspondentes do número quântico m para cada l . Qual a degenerescência do nível $n = 3$?
5. Considere agora que, além de $n = 3$, fixamos também $l = 2$. Obtenha a função de onda radial R e normalize-a.
6. Ainda para $n = 3$ e $l = 2$, considere o estado com $m = 0$.
a) Escreva a função de onda ψ_{320} e normalize-a;
b) Escreva a probabilidade de, no estado ψ_{320} , encontrar o elétron na posição (r, θ, ϕ) dentro do volume infinitesimal $d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.
7. No mesmo estado ψ_{320} , qual a probabilidade de encontrar o elétron entre r e $r + dr$ para quaisquer ângulos θ e ϕ ?
8. Qual o raio mais provável de se encontrar o elétron no estado ψ_{320} ?
9. Qual o raio médio correspondente ao estado ψ_{320} ?
10. Se o estado ψ_{320} decai no estado ψ_{211} emitindo um fóton, qual é a energia desse fóton em eV? Qual é o correspondente comprimento de onda desse fóton em Å.
11. Um átomo de hidrogênio decai do estado representado pela função de onda ψ_{321} para o estado representado pela função ψ_{2lm} .

- a) Para quais valores de l e m esta transição é permitida? Por quê?
b) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido;
c) Se nesse estado final o átomo é submetido a um *campo magnético* externo homogêneo e fraco, em quantas linhas o nível se desdobra? Por quê?
12. a) Construa a função de onda espacial ψ para o hidrogênio no estado $n = 3$, $l = 2$, $m = 1$. Expresse sua resposta somente como uma função de r, θ, ϕ e a (o raio de Bohr);
b) Cheque que esta função de onda está devidamente normalizada, calculando integrais apropriadas em r, θ e ϕ .
13. a) Construa a função de onda para o hidrogênio no estado $n = 4$, $l = 3$, $m = 3$. Expresse sua resposta como função das coordenadas esféricas r, θ e ϕ ;
b) Encontre o valor esperado de r nesse estado.
14. Um átomo de hidrogênio está em um estado que é combinação linear de dois estados estacionários $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$ e $n = 2$, $l = 1$, $m = -1$, ou seja,

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

- a) Construa $\psi(\vec{r}, 0)$ em termos de r, θ e ϕ ;
b) Encontre o valor esperado da energia potencial $\langle V \rangle$. Ela depende do tempo? Dê a fórmula e o valor numérico, em eV.

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$	$R_{10} = 2a^{-3/2} \exp(-r/a)$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta$	$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp(-r/2a)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$	$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-3/2} \frac{r}{a} \exp(-r/2a)$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$	$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp(-r/3a)$
$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$	$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp(-r/3a)$
		$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-3/2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp(-r/3a)$

$$L^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \quad \int_0^\infty r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{(\alpha)^{n+1}} \quad \Delta l = \pm 1, \Delta m = 0$$

$$E_n = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad E = \frac{hc}{\lambda} \cong \frac{12400 \text{ Å eV}}{\lambda}$$

$$Pd^3r = |\psi_{nlm}|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{ou} \quad Pdr = |R_{nl}|^2 r^2 dr$$