

Um pouco sobre os alephs

Para todo ordinal α , e por indução transfinita, , vamos definir $\aleph_\alpha$:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \text{para } \alpha = \delta + 1, \aleph_\alpha = H(\aleph_\delta) \\ \text{se } \alpha \text{ é um ordinal limite, } \aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\delta : \delta < \alpha\} = \bigcup\{\aleph_\delta : \delta < \alpha\} \end{cases}$$

Algumas propriedades dos alephs

Propriedade 1: Para todo ordinal α , $\aleph_\alpha \in \aleph_{\alpha+1}$.

Propriedade 2: Dados ordinais α, β ,

$$(i) \quad \alpha \in \beta \rightarrow \aleph_\alpha \in \aleph_\beta.$$

$$(ii) \quad \alpha \subseteq \beta \rightarrow \aleph_\alpha \subseteq \aleph_\beta.$$

Propriedade 3: Para todo ordinal β , $\beta \subseteq \aleph_\beta$.

Propriedade 4: Existe um ordinal β tal que $\beta = \aleph_\beta$.

Demonstração: Considere

$$\begin{cases} \gamma_0 = \omega \\ \gamma_1 = \aleph_{\gamma_0} \\ \gamma_2 = \aleph_{\gamma_1} \\ \vdots \\ \gamma_{n+1} = \aleph_{\gamma_n} \\ \vdots \end{cases}$$

e considere $\beta = \bigcup_{n \in \omega} \gamma_n$

Como β é união de um conjunto de cardinais limites, vale que β é também um cardinal limite. Por sua vez, sendo um cardinal, é também um ordinal. Dessa forma, temos que

$$\aleph_\beta = \sup\{\aleph_\delta : \delta < \beta\}$$

Como $\beta = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$, para todo $\delta < \beta$, existe $n \in \omega$ tal que $\delta < \gamma_n$, e portanto, $\aleph_\delta < \aleph_{\gamma_n}$. Podemos escrever então que

$$\aleph_\beta = \sup\{\aleph_\delta : \delta < \beta\} = \sup\{\aleph_{\gamma_n} : n \in \omega\}$$

e resulta que $\beta = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\} = \sup\{\gamma_{n+1} : n \in \omega\} = \sup\{\aleph_{\gamma_n} : n \in \omega\} = \aleph_\beta$. $\triangle$

Teorema: $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \equiv \aleph_\alpha$

Demonstração: Já sabemos que, para $\alpha = 0$, tem-se que $\aleph_0 \times \aleph_0 \equiv \aleph_0$. Suponhamos a propriedade verdadeira para todo ordinal $\beta < \alpha$. Vamos prová-la para α .

Em $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, consideremos a seguinte relação binária $<$:

$$(\delta_1, \gamma_1) < (\delta_2, \gamma_2) \text{ se } \begin{cases} \max\{\delta_1, \gamma_1\} < \max\{\delta_2, \gamma_2\} \\ \text{ou} \\ \max\{\delta_1, \gamma_1\} = \max\{\delta_2, \gamma_2\} \text{ e } \delta_1 < \delta_2 \\ \text{ou} \\ \max\{\delta_1, \gamma_1\} = \max\{\delta_2, \gamma_2\} \text{ e } \delta_1 = \delta_2 \text{ e } \gamma_1 < \gamma_2 \end{cases}$$

e definimos $(\delta_1, \gamma_1) \leq (\delta_2, \gamma_2)$ se $(\delta_1, \gamma_1) < (\delta_2, \gamma_2)$ ou $(\delta_1, \gamma_1) = (\delta_2, \gamma_2)$

Afirmção 1: $\leq$ é uma ordem total em $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$. (Exercício.)

Afirmção 2: $\leq$ é uma boa ordem em $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$.

Seja $A \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, $A \neq \emptyset$. Considere $C = \{\max\{\delta, \gamma\} : (\delta, \gamma) \in A\}$. Seja $\lambda_0 = \min C$, e considere $C_0 = \{(\delta, \gamma) \in A : \max\{\delta, \gamma\} = \lambda_0\}$. Então $\lambda_0 < \max\{\delta, \gamma\} : (\delta, \gamma) \in (A - C_0)$, de maneira que o mínimo de A , se existir, é assumido em algum ponto do conjunto C_0 .

Seja $D_1 = \{\delta \in \aleph_\alpha : \exists \gamma \in \aleph_\alpha \text{ e } (\delta, \gamma) \in C_0\}$. Considere $\delta_0 = \min D_1$ e $C_1 = \{(\delta_0, \gamma) : (\delta_0, \gamma) \in C_0\}$. Dessa forma, $\forall (\delta, \eta) \in (C_0 - C_1)$, $(\delta_0, \gamma) < (\delta, \eta)$. Portanto, o mínimo de A , se existir, estará assumido em algum ponto do conjunto C_1 .

Considere $D_2 = \{\gamma : (\delta_0, \gamma) \in C_1\}$ e seja $\gamma_0 = \min D_2$. Então $(\delta_0, \gamma_0) \leq (\delta, \gamma)$, $\forall (\delta, \gamma) \in C_1$, e $(\delta_0, \gamma_0) = \min A$.

Como $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \leq)$ é bem ordenado, existe um ordinal ν tal que $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \equiv \nu$.

Afirmção 3: Para todo $(\delta, \gamma) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, tem-se que $|(\delta, \gamma)^\leftarrow| < \aleph_\alpha$.

Com efeito: considere $\lambda = \max\{\delta, \gamma\} + 1$. Então $\delta < \lambda$ e $\gamma < \lambda$.

Afirmção: $(\delta, \gamma)^\leftarrow \subseteq \lambda \times \lambda$.

Com efeito: se $(u, v) \in (\delta, \gamma)^\leftarrow$ então $(u, v) < (\delta, \gamma)$, e portanto, $\max\{u, v\} \leq \max\{\delta, \gamma\} < \max\{\delta, \gamma\} + 1 = \lambda$. Logo, $(u, v) \in \lambda \times \lambda$, de maneira que $(\delta, \gamma)^\leftarrow \subseteq \lambda \times \lambda$.

Por sua vez, $\delta, \gamma \in \aleph_\alpha \rightarrow \max\{\delta, \gamma\} + 1 = \lambda \in \aleph_\alpha$ (pois $\aleph_\alpha$ é ordinal limite). Dessa forma,

$\lambda < \aleph_\alpha \rightarrow |\lambda| < \aleph_\alpha$, e existe $\beta < \alpha$ tal que $|\lambda| = \aleph_\beta < \aleph_\alpha$.

Suponhamos $\aleph_\alpha < \nu$. Como $\nu \equiv \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, segue que $\aleph_\alpha$ é isomorfo a um segmento inicial S de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$: existem $\delta, \gamma \in \aleph_\alpha$ tais que $S = (\delta, \gamma)^\leftarrow$. Temos então:

$\aleph_\alpha < \nu \equiv \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \equiv (\delta, \gamma)^\leftarrow$ e $|(\delta, \gamma)^\leftarrow| < \aleph_\alpha$.

Logo, $|\aleph_\alpha| < \aleph_\alpha$: contradição. Concluimos que $\nu \leq \aleph_\alpha$, e portanto, $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \hookrightarrow \aleph_\alpha$, de maneira que $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \equiv \aleph_\alpha$. $\triangle$