

---

# Grafos: Ordenação topológica

---

SCC216/503 Modelagem Computacional em  
Grafos/Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Thiago A. S. Pardo  
Maria Cristina F. Oliveira

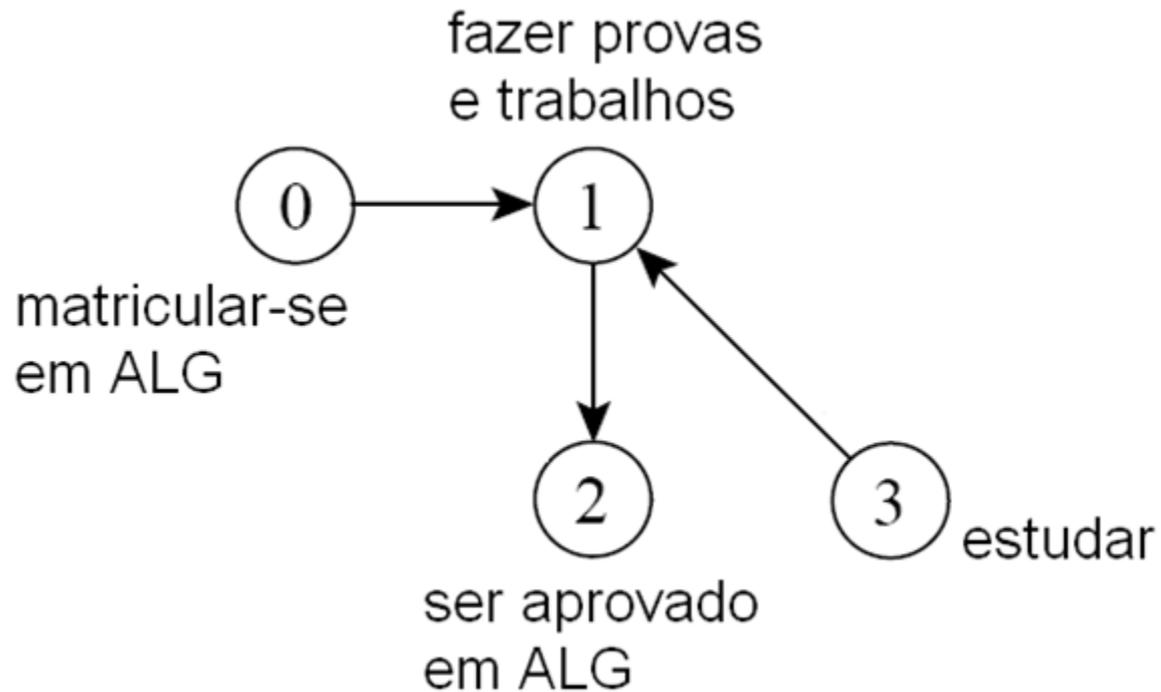
# Ordenação topológica

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
  - Ordenação linear dos vértices do grafo tal que um vértice  $u$  precede um vértice  $v$  se existe uma aresta  $(u,v)$ 
    - Qual a utilidade da ordenação topológica? Exemplos?

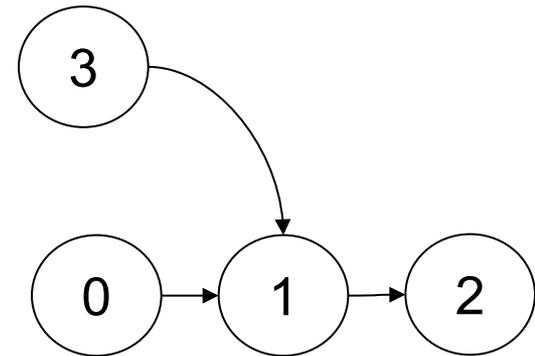
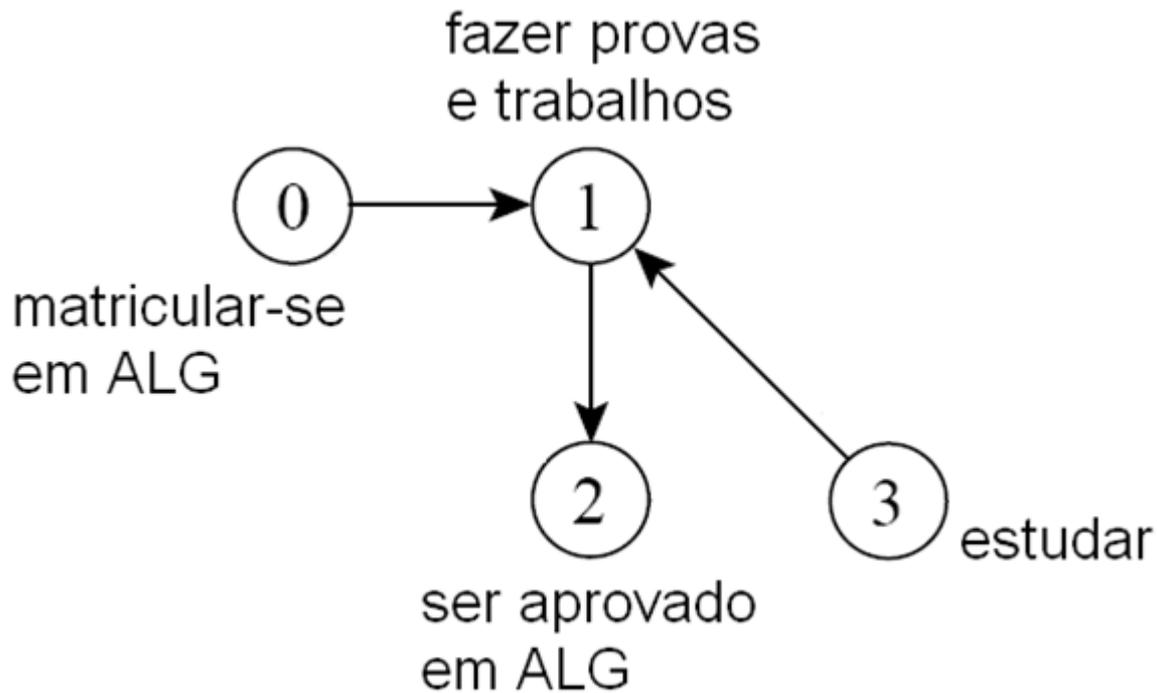
# Ordenação topológica

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
  - Ordenação linear dos vértices do grafo tal que um vértice  $u$  precede um vértice  $v$  se há uma aresta  $(u,v)$
- Útil para programar a execução de uma sequencia de muitas tarefas em que algumas dependem de outras...
  - p. ex., ao construir um edifício, ao determinar a sequencia de disciplinas de um curso
    - certas tarefas/disciplinas podem ser executadas/cursadas simultaneamente, outras não...

# Exemplo



# Exemplo



---

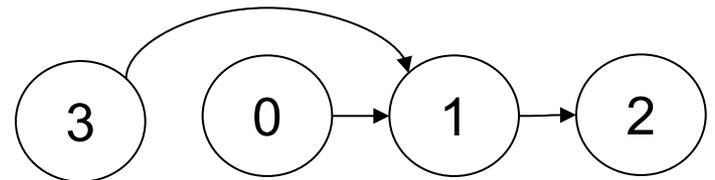
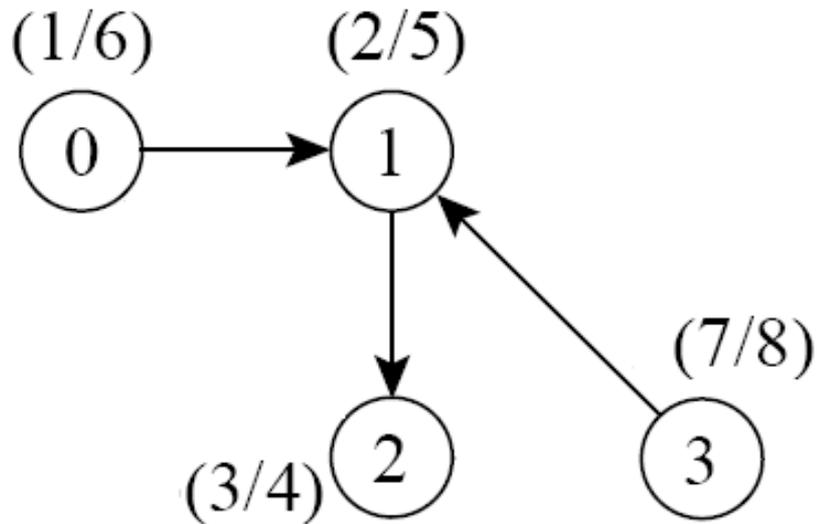
# Ordenação topológica

## ■ Algoritmo

1. Faça a busca em profundidade no grafo
  - Ao término do processamento de cada vértice, insira o vértice **no início** de uma lista linear (inicialmente vazia)
2. Ao percorrer a lista do início ao final, tem-se a ordenação topológica do grafo!

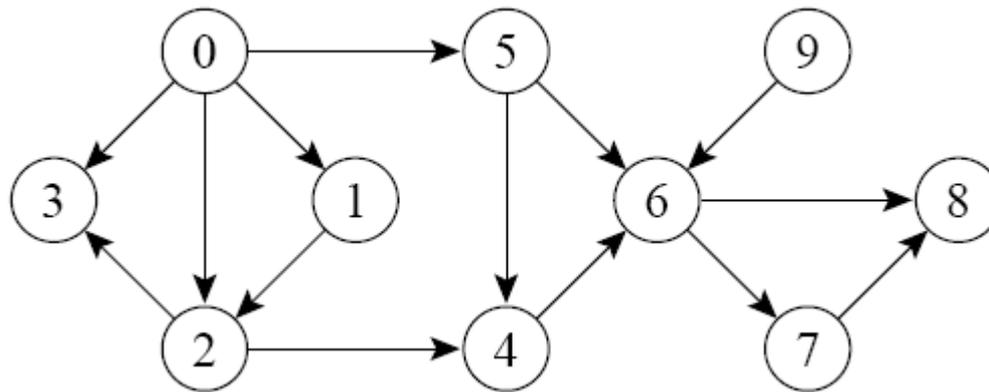
# Ordenação topológica

- Ordenação topológica: exemplo



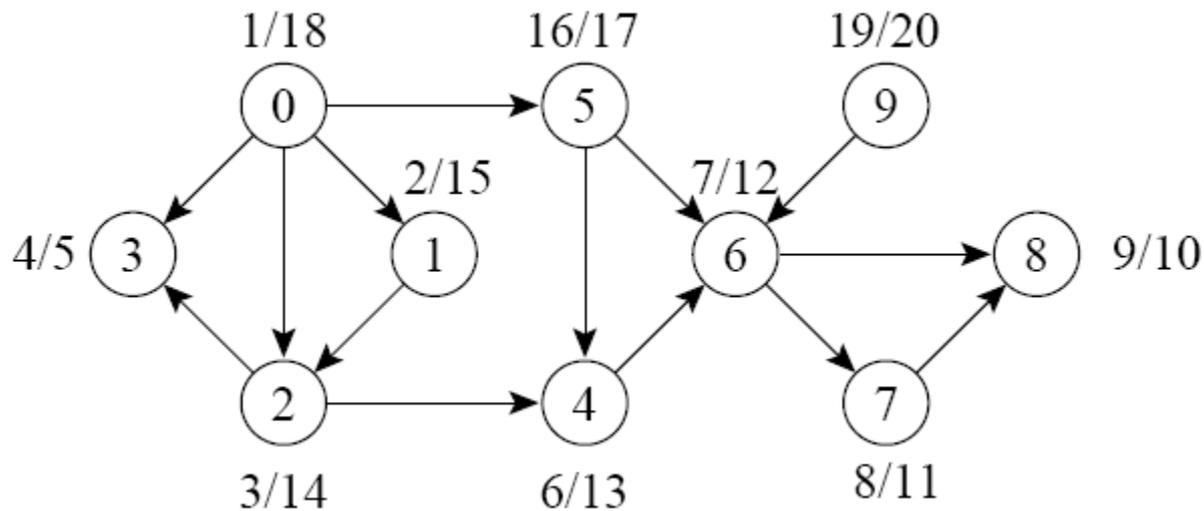
# Ordenação topológica

- Faça a ordenação topológica do grafo abaixo



# Ordenação topológica

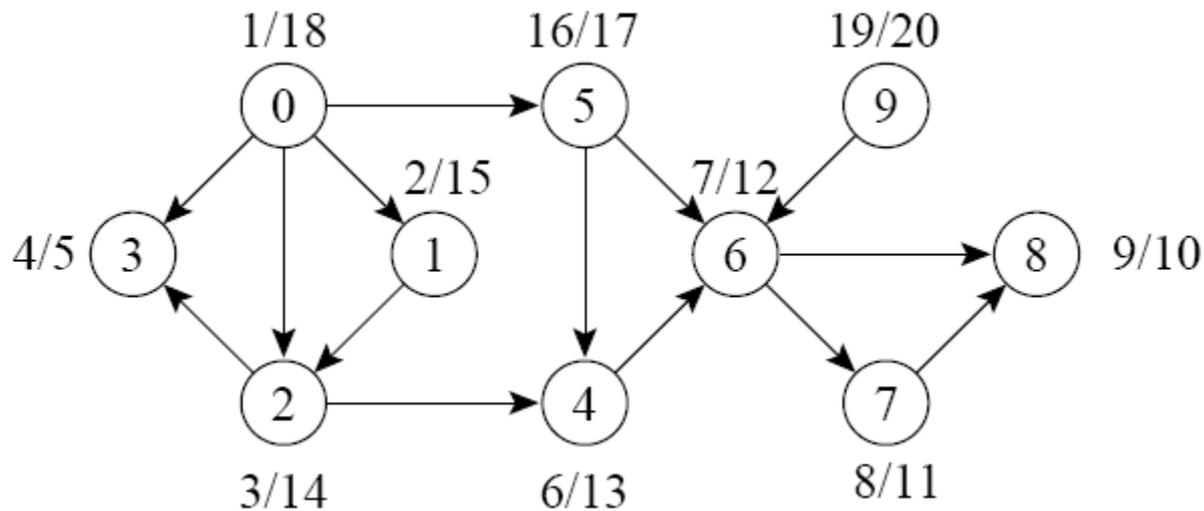
- Faça a ordenação topológica do grafo abaixo



Visita DFS: 3 8 7 6 4 2 1 5 0 9

# Ordenação topológica

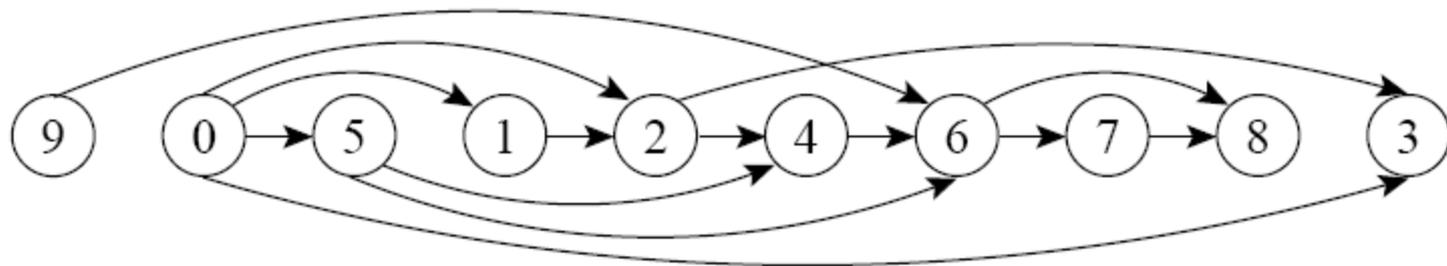
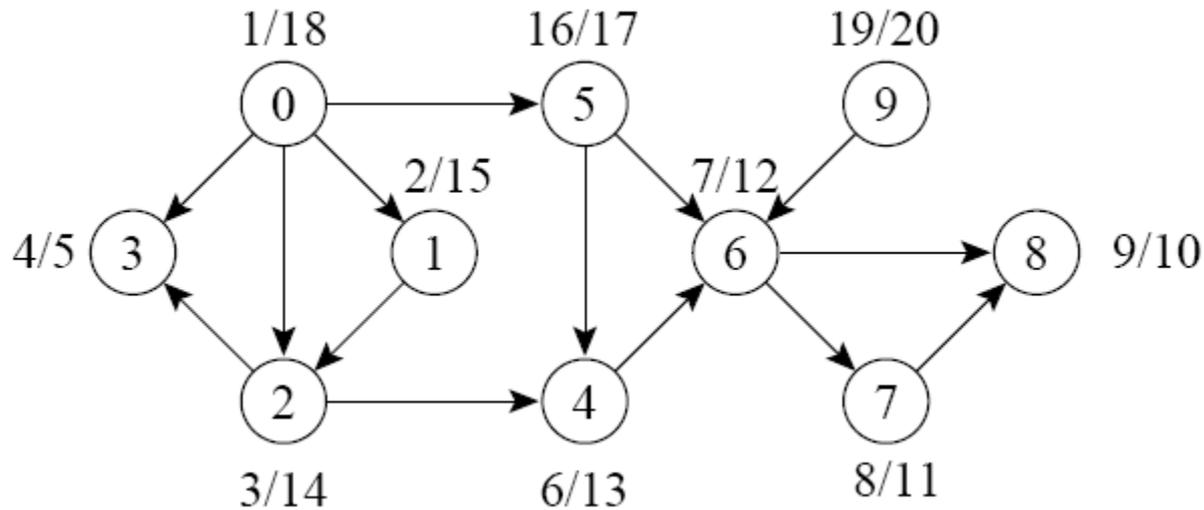
- Faça a ordenação topológica do grafo abaixo



Visita DFS: 3 8 7 6 4 2 1 5 0 9

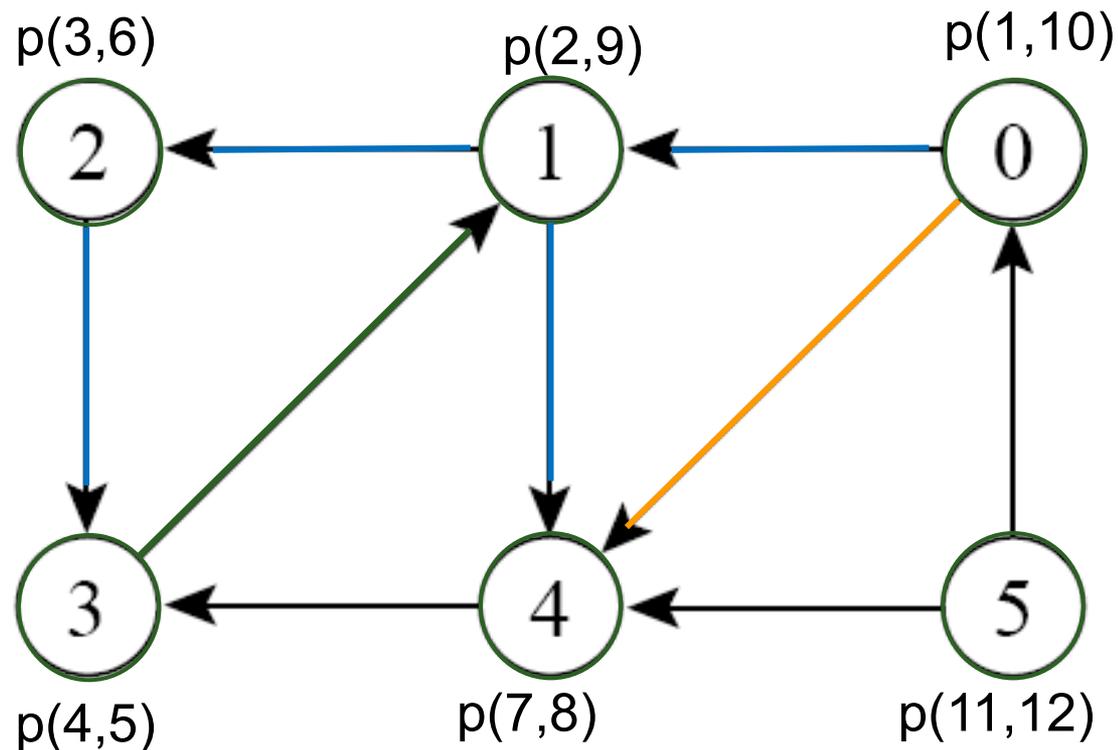
# Ordenação topológica

- Faça a ordenação topológica do grafo abaixo



# Ordenação topológica

- Pergunta: é possível gerar uma ordenação topológica deste grafo?



Visita DFS: 3 2 4 1 0 5

---

# Ordenação topológica

- Ordenação topológica de um grafo direcionado **acíclico**
  - Como alterar o algoritmo de busca em profundidade para realizar a ordenação topológica?
  - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?

# Ordenação topológica

- Ordenação topológica de um grafo direcionado **acíclico**
  - Como alterar o algoritmo de busca em profundidade para realizar a ordenação topológica?
    - Após o vértice ficar preto, insere-se o vértice no início da lista ordenada!
  - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?
    - $O(|V|+|A|)$

# Ordenação topológica

## ■ Atenção

- Ordenação topológica não é necessariamente única
- **Não é possível** gerar uma ordenação topológica em grafos com ciclos

---

# Algoritmo de caminho mínimo baseado na ordenação topológica

## ■ Características

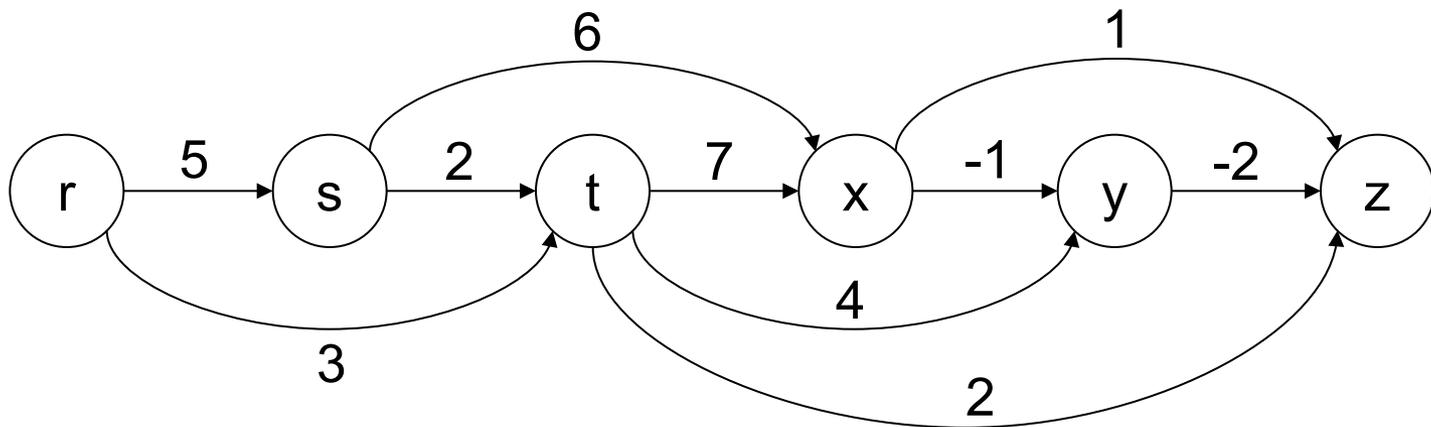
- ❑ Caminho mais curto de **origem única**
- ❑ Grafos **sem ciclos**
- ❑ Admite **pesos negativos**

## ■ Método

- ❑ Faz-se a ordenação topológica do grafo
- ❑ Percorre-se a lista de vértices na sequência topológica, relaxando-se todas as arestas que partem de cada vértice

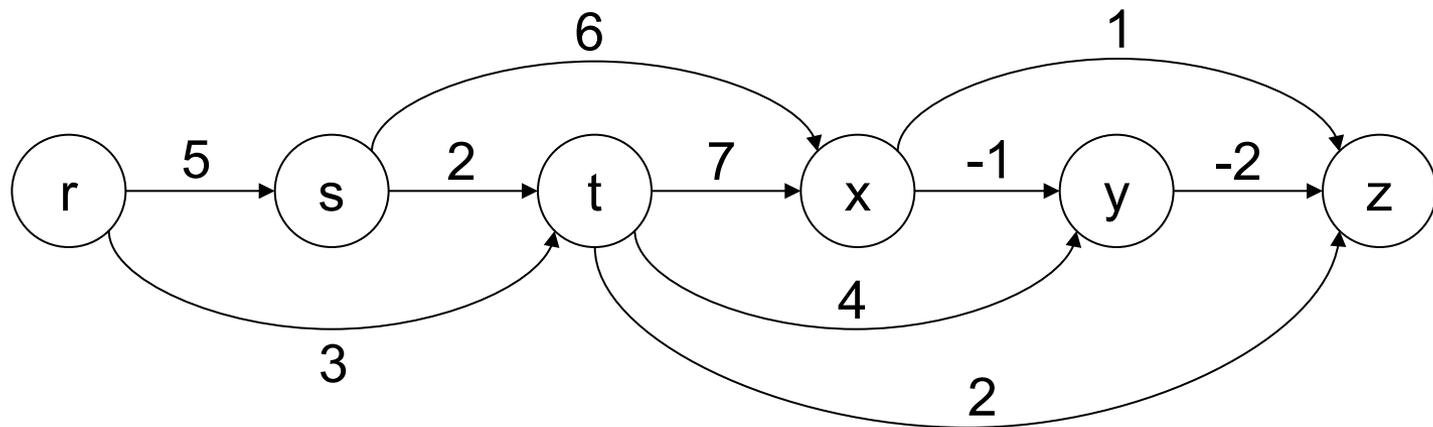
# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)



# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Estimativas pessimistas



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=\infty$$

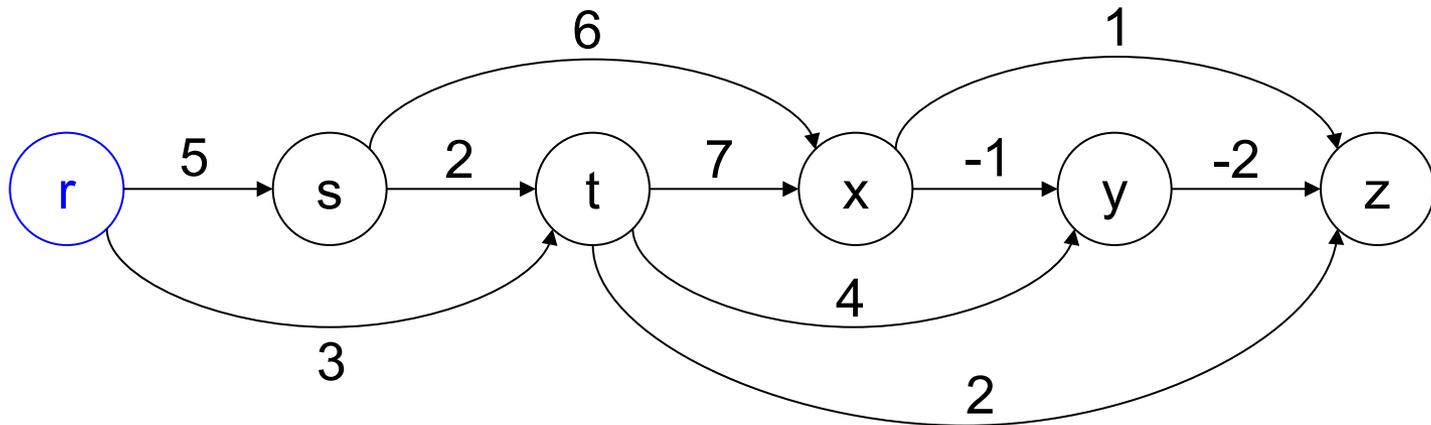
$$d(x)=\infty$$

$$d(y)=\infty$$

$$d(z)=\infty$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a r



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=\infty$$

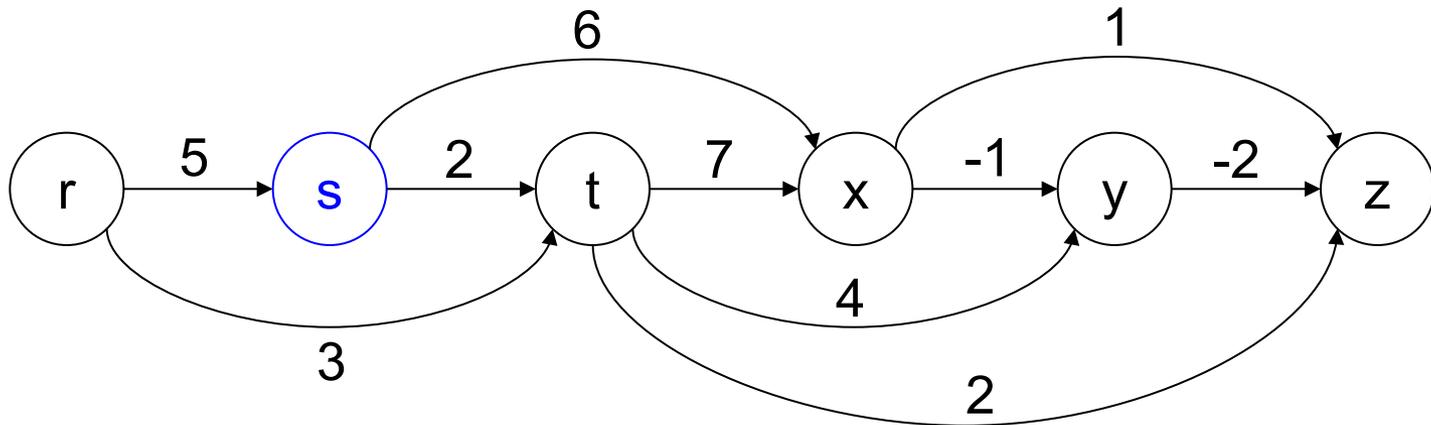
$$d(x)=\infty$$

$$d(y)=\infty$$

$$d(z)=\infty$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

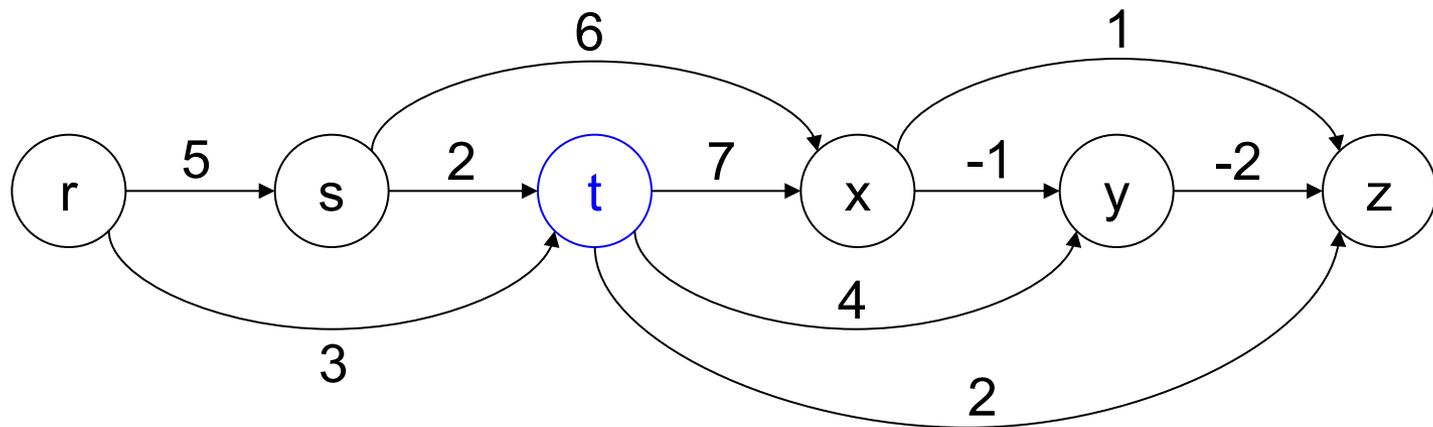
- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a s



$d(r)=\infty$     $d(s)=0$     $d(t)=\infty \rightarrow 2$     $d(x)=\infty \rightarrow 6$     $d(y)=\infty$     $d(z)=\infty$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a t



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=2$$

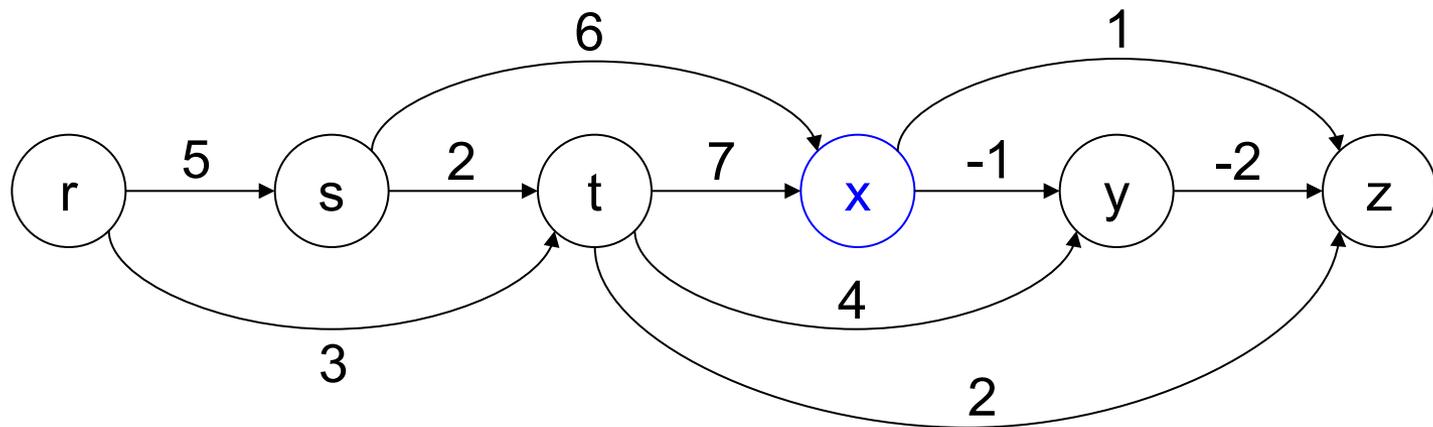
$$d(x)=6$$

$$d(y)=\infty \rightarrow 6$$

$$d(z)=\infty \rightarrow 4$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a x



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=2$$

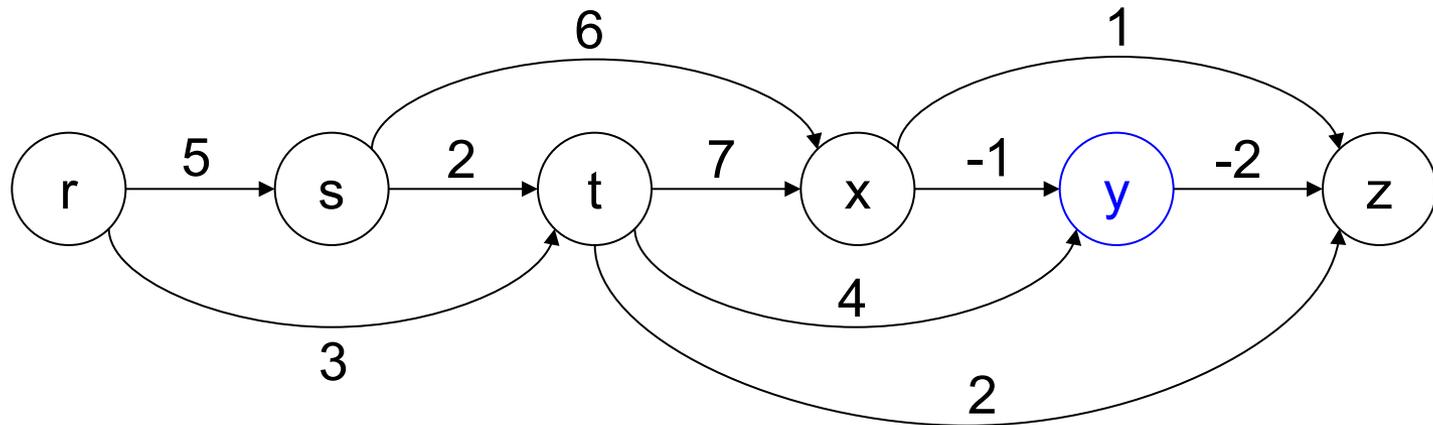
$$d(x)=6$$

$$d(y)=6 \rightarrow 5$$

$$d(z)=4$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a y



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=2$$

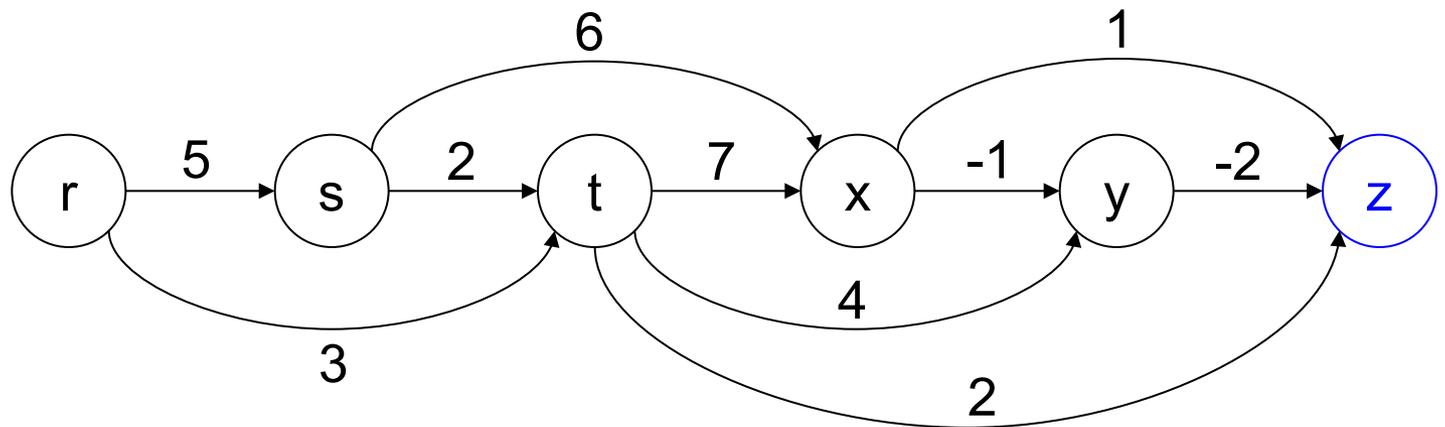
$$d(x)=6$$

$$d(y)=5$$

$$d(z)=4 \rightarrow 3$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Exemplo (a partir de s)
  - Arestas adjacentes a z



$$d(r)=\infty$$

$$d(s)=0$$

$$d(t)=2$$

$$d(x)=6$$

$$d(y)=5$$

$$d(z)=3$$

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

**Caminho mínimo baseado na ordenação topológica(G, w, s)**  
**início**

//ordenação topológica

ordenar topologicamente o grafo (via busca em profundidade)

//inicializa variáveis

**para** cada vértice v **faça**

$d[v]=\infty$

    antecessor[v]=-1

$d[s]=0$

//faz relaxamento de arestas e determina caminhos mais curtos

**para** cada vértice u tomado em sequência topológica **faça**

**para** cada vértice v adjacente a u **faça**

        relax(u,v,w)

**fim**

---

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Complexidade de tempo: ?

---

# Algoritmo baseado na ordenação topológica

- Complexidade de tempo:  $O(|V| + |A|)$ 
  - Por que?

# Exercício

- Calcule os caminhos mínimos para o grafo abaixo a partir do vértice 1 aplicando o algoritmo **baseado na ordenação topológica**

