A integral de Riemann - Mais aplicações
Aula 31

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Sabemos que $\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$, ou seja, $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b v(t)\,dt = x(b) - x(a) \tag{1}$$

que é o **deslocamento** da partícula entre os instantes a e b.

Para calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos que considerar os intervalos quando $v(t) \geq 0$ e também quando $v(t) \leq 0$. Portanto, definimos por

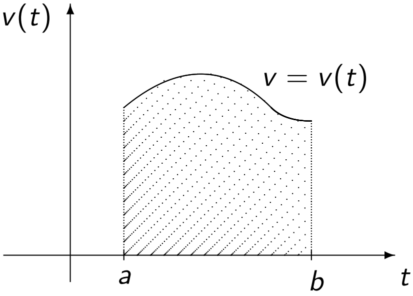
$$\int_a^b |\, v(t)|\, dt \qquad (2)$$

o **espaço percorrido** pela partícula entre os instantes a e b.

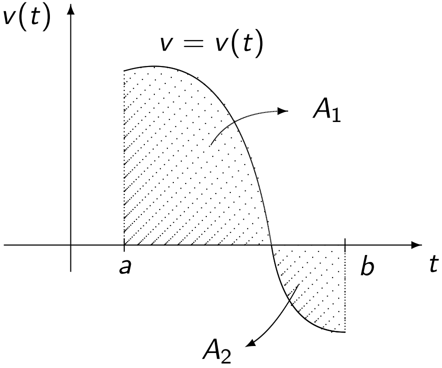
Observação: Se $v(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então (**??**) e (**??**) implicam que o espaço percorrido pela partícula e o seu deslocamento coincidem entre os instantes a e b e são iguais à

$$\int_a^b v(t)\, dt$$

que determina a área do conjunto limitado pelas retas $t = a$, $t = b$, pelo eixo $0t$ e pelo gráfico de $v = v(t)$. Veja a figura abaixo.


$v(t)$
$v = v(t)$
a
b
t

Observação: Seja $c \in [a, b]$ e suponha que $v(t) \geq 0$ em $[0, c]$ e $v(t) \leq 0$ em $[c, b]$ conforme a figura.



Então o deslocamento da partícula é dado por (**??**) acima, ou seja,

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)\,dt = A_1 - A_2\,,$$

mas a distância percorrida entre os instantes a e b é dada por (**??**), ou seja,

$$\int_a^b |\,v(t)|\,dt = \int_a^c v(t)\,dt - \int_c^b v(t)\,dt = A_1 + A_2\ .$$

Logo, neste caso, a distância percorrida e o deslocamento <u>não coincidem</u>.

Exemplo

Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2 - t$.

(a) *Calcule o deslocamento entre os instantes* $t = 1$ *e* $t = 3$.

(b) *Calcule a distância percorrida entre os instantes 1 e 3.*

(c) *Interprete o movimento.*

$$\text{Deslocamento } = \int_1^3 (2-t)\,dt = \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^3 = 0.$$

$$\text{Espaço percorrido } = \int_1^3 |2-t|\,dt = \int_1^2 (2-t)\,dt - \int_2^3 (2-t)\,dt = 1.$$

Interpretação: em $[1,2)$ a velocidade é positiva, o que significa que neste intervalo a partícula avança no sentido positivo; em $(2,3]$ a velocidade é negativa, o que significa que neste intervalo a partícula recua, de tal modo que em $t=3$ ela volta a ocupar a mesma posição por ela ocupava no instante $t=1$.

$$x(t) = 2t - \tfrac{t^2}{t} + x_0 = \tfrac{t}{2}(4-t) + x_0$$

$$x(1) = x(3) = \tfrac{3}{2} + x_0$$

Trabalho

Nesta seção, vamos definir trabalho realizado por uma força que varia com a posição. No caso de uma força constante F, o trabalho realizado é definido pelo produto da força pela distância d que o objeto se move:

$$\tau = Fd, \qquad \text{trabalho} = \text{força} \ \times \ \text{distância.}$$

Vamos considerar agora uma força F que atua sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x. Suponhamos que esta força seja paralela ao deslocamento e variável com a função de posição x. Então escrevemos

$$\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}\,,$$

onde $f(x)$ é a componente de $\vec{F}(x)$ na direção do deslocamento (isto é, na direção de $\vec{i}$).

Consideremos o deslocamento da partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que $f(x)$ seja contínua no intervalo $[a, b]$. Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e escolhemos por amostragem $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\,,\ i = 1, \ldots, n$. Se $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, f será praticamente constante no intervalo, e então podemos dizer que trabalho realizado por $\vec{F}$ de x_{i-1} até x_i será aproximadamente

$$\tau_i = f(c_i)\Delta x_i.$$

Logo podemos aproximar o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ de a até b pela soma dos trabalhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

A intuição acima nos motiva a definirmos *trabalho* como segue.

Definição

O **trabalho** τ *realizado por uma força* $\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}$ *sobre uma partícula no deslocamento de* $x = a$ *até* $x = b$ *é dado por*

$$\boxed{\tau = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx\,.}$$

Observação: Na Definição **??**, a e $b \in \mathbb{R}$ são quaisquer, isto é, podemos ter $a \geq b$ ou $a \leq b$, e f é integrável em $[a, b]$, mas não necessariamente contínua. Em particular, se $a < b$ e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então o trabalho τ coincidirá com a área do conjunto limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo

Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força paralela ao deslocamento e de componente $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Calcule o trabalho realizado pela força no deslocamento de $x = 1$ até $x = 2$.

$$\tau = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo

Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, com $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$. Suponha que $x(t)$ seja 2 vezes derivável em $[t_0, t_1]$ e que a componente $f(x)$, na direção do deslocamento, da força resultante que atua sobre a partícula seja contínua em $[x_0, x_1]$. Seja $v = v(t)$ a função que descreve a velocidade da partícula, com $v_0 = v(t_0)$ e $v_1 = v(t_1)$. Verifique que trabalho realizado pela resultante de x_0 até x_1 é igual à variação na energia cinética, isto é,

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,mv_1^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(t)\Big|_{t_0}^{t_1}.}$$

Temos $x = x(t)$. Logo $dx = x'(t)\,dt$. Como $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, então para $x = x_0$, $t = t_0$ e, para $x = x_1$, $t = t_1$. Assim

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\underbrace{x(t)}_{x})\,\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))v(t)\,dt. \tag{3}$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos

$$f(x(t)) = m \cdot a(t), \tag{4}$$

onde $a = a(t)$ é a aceleração da partícula no instante t.

Fazendo a mudança de variável $v = v(t)$, $dv = v'(t)\,dt = a(t)\,dt$, para $t = t_0$, $v = v_0$ e para $t = t_1$, $v = v_1$; portanto, de (**??**) e (**??**),

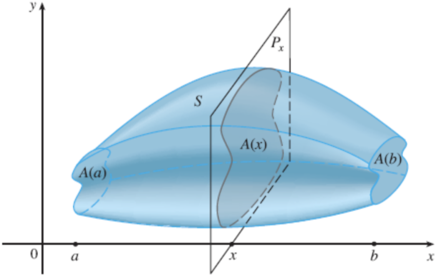
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))v(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\,a(t)v(t)\,dt = m\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{v(t)}_{v}\,\underbrace{a(t)\,dt}_{dv}$$

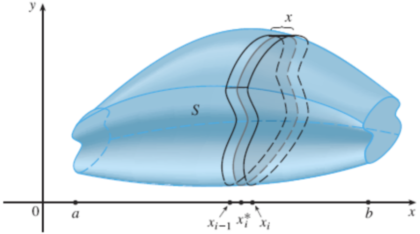
$$= m\int_{v_0}^{v_1} v dv = m\frac{v^2}{2}\bigg|_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2}\,mv_1^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2.$$

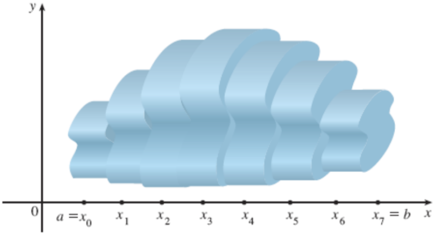
Volume de um Sólido

Seja S um sólido qualquer. Interceptamos S com um plano e obtemos uma região plana que é chamada de **seção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área de seção transversal perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leq x \leq b$.



Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Vamos dividir S em n fatias usando os planos $P_{x_1}, \cdots, P_{x_{n-1}}$. Escolhemos pontos $x_i^* \in [x_{i-1}\,, x_i]$ e aproximamos a i-ésima fatia S_i por um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e altura Δx_i.





O volume deste cilindro é $A(x_i^*)\Delta x_i$; assim, uma aproximação para o volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Somando os volumes destas fatias obtemos uma aproximação para o volume total

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Fazendo $\|P\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \to 0$, esta aproximação parece melhorar. Portanto, definimos o **volume do sólido** S por

$$\boxed{V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\, dx.}$$

Em particular, se S é o conjunto obtido por rotação, *em torno do eixo* x, do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

então

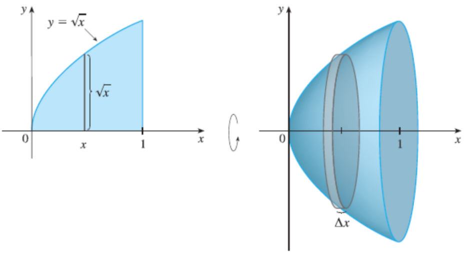
$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Portanto, o **volume do sólido** S **obtido por rotação, em torno do eixo** x, **do conjunto** A é

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.}$$

Exemplo

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.



(a) (b)

Quando fatiamos através do ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área desta seção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \pi \int_0^1 x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, *em torno do eixo y*, de uma região compreendida entre o eixo y e uma curva $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$, usamos o método com x substituído por y. Nesse caso, a seção transversal circular é

$$A(y) = \pi[R(y)]^2 \quad \text{e o volume} \quad \boxed{V = \int_c^d A(y)\, dy.}$$

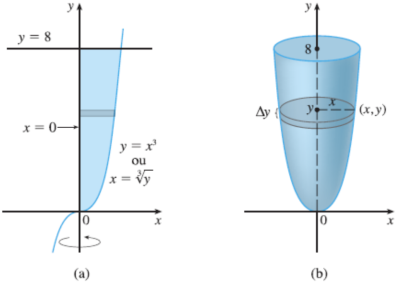
Exemplo

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = \sqrt[3]{y}$, $0 \leq y \leq 8$.

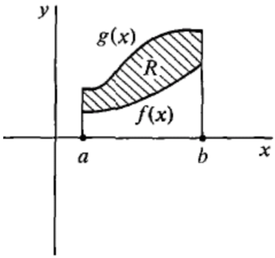
O volume é

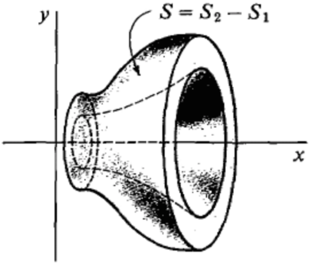
$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy$$

$$= \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Big|_0^8 = \pi \frac{96}{5}.$$



Revolução de região entre duas curvas

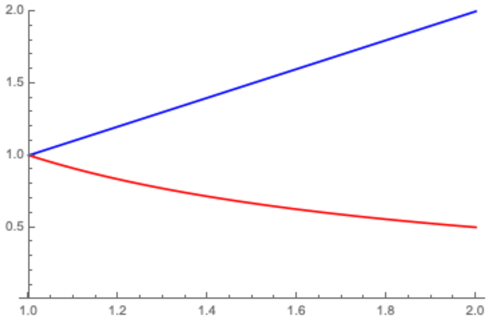




Exemplo

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; \frac{1}{x} \leq y \leq x \,,\; 1 \leq x \leq 2\right\} \,.$$



O volume $V = V_2 - V_1$, onde V_2 e V_1 são os volumes obtidos pela rotação, em torno do eixo x, dos conjuntos

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq y \leq x\,,\ 1 \leq x \leq 2\right\}$$

e

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 2\right\}\ .$$

Assim,

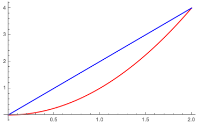
$$V_2 = \pi \int_1^2 x^2\,dx = \frac{7\pi}{3} \qquad V_1 = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, $V = \dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{6}.$

Exemplo

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante.

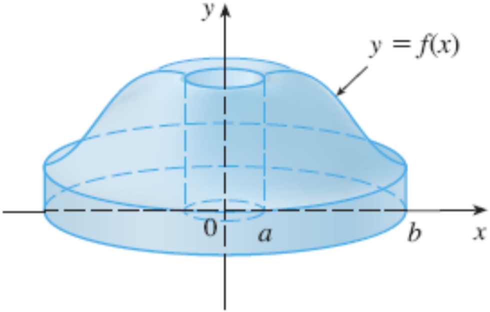
A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$.



O volume $V = V_2 - V_1$, onde V_2 e V_1 são os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo y, das curvas $R(y) = \sqrt{y}$ e $r(y) = \dfrac{y}{2}$, respectivamente. Assim,

$$V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 \, dy = 8\pi, \quad V_1 = \pi \int_0^4 \frac{y^2}{4} \, dy = \frac{\pi 16}{3}, \quad V = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Considere um sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \geq 0$, e pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$.

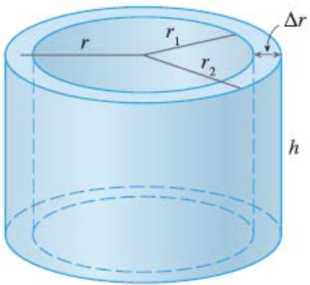


Volume de uma casca cilíndrica

$$\begin{aligned} V &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= 2\pi \, \tfrac{r_2 + r_1}{2} \, (r_2 - r_1) \, h \\ &= 2\pi r \, h \, \Delta r \end{aligned}$$

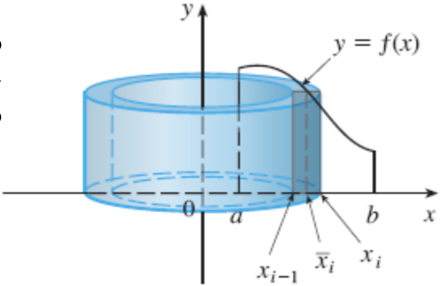
$$r = \tfrac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{e} \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

V = [circunferência][altura][espessura]



Cascas cilíndricas

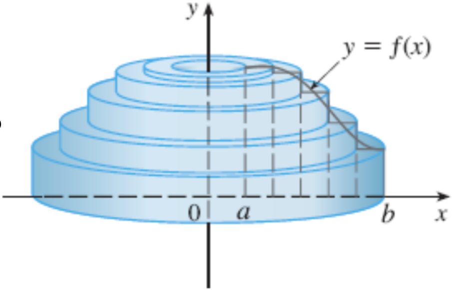
Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e seja $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ o ponto médio do i-ésimo intervalo, $\overline{x}_i = (x_i + x_{i-1})/2$. Se o retângulo com base $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e altura $f(\overline{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica cujo volume é



$$
\begin{aligned}
V_i &= (2\pi\overline{x}_i)f(\overline{x}_i)\Delta x_i \\
&= [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}]
\end{aligned}
$$

Portanto uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas seções:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi \overline{x}_i) f(\overline{x}_i) \Delta x_i.$$



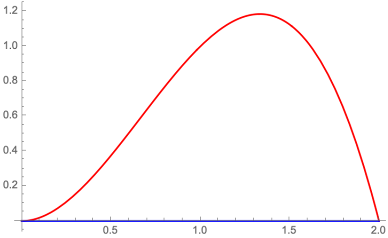
Esta aproximação torna-se melhor quando $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \to 0$.

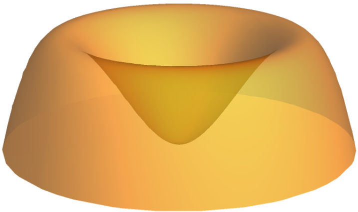
Então definimos o **volume do sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$, onde** $f(x) \geq 0$, $y = 0, x = a$ **e** $x = b$ por

$$\boxed{V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x}_i\, f(\overline{x}_i) \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx.}$$

Exemplo

Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$, para $0 \leq x \leq 2$.





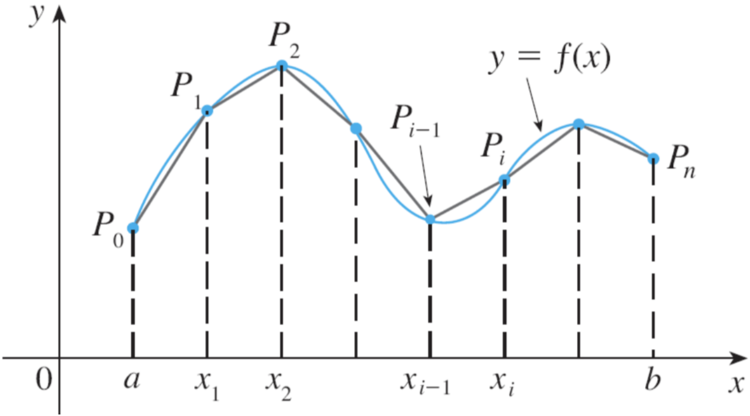
$$V = 2\pi \int_0^2 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx = 2\pi(8 - \frac{32}{5}) = \frac{16}{5}\pi.$$

Observe que tanto pelo método de fatiamento, quanto pelo método de cascas cilíndricas temos:

$$\text{volume} = \text{integral de área}$$

Queremos definir o comprimento de uma curva. Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento somando os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. Agora suponhamos que a curva C seja o gráfico da função $y = f(x)$, onde f é derivável e $a \leq x \leq b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C. O comprimento da curva C é aproximadamente o comprimento da poligonal, e a aproximação torna-se melhor quando $\|P\| \to 0$.


y
P_2
P_1
$y = f(x)$
P_{i-1}
P_i
P_n
P_0
0
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x

O comprimento da poligonal é

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe um $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i.$$

Segue

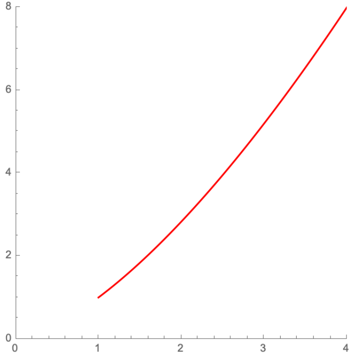
$$L(P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f'(c_i)\Delta x_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i.$$

Então, definimos o **comprimento da curva** C por

$$\boxed{L=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.}$$

Exemplo

Calcule o comprimento de arco de $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$.



Exemplo

Calcule o comprimento de arco de $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$.

Como $y = f(x)$, temos $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, e assim,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx.$$

Fazendo, $u = 1 + \frac{9}{4}x$, então $du = \frac{9}{4}\, dx$. Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Portanto,

$$L = \frac{4}{9} \int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right].$$

Exercício: Calcule o comprimento da curva $y = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $[R : \pi/4]$.