2023
Aula (14)

(8) Interpolação: curva que passa por cima de um conjunto de dados (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$

↳ valores

↳ nós

Quarteroni: 3.3

Franco: Cap. 10

Teorema: para qualquer conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$ com nós distintos x_i, existe um único polinômio de grau $\leq n$, tal que $\underbrace{p_n(x_i) = y_i}$

(Franco pág 281)

polinômio interpolante dos valores y_i nos nós x_i

polinômios:
- fácil de computar
- derivadas e integrais computáveis
- encontrar raízes.

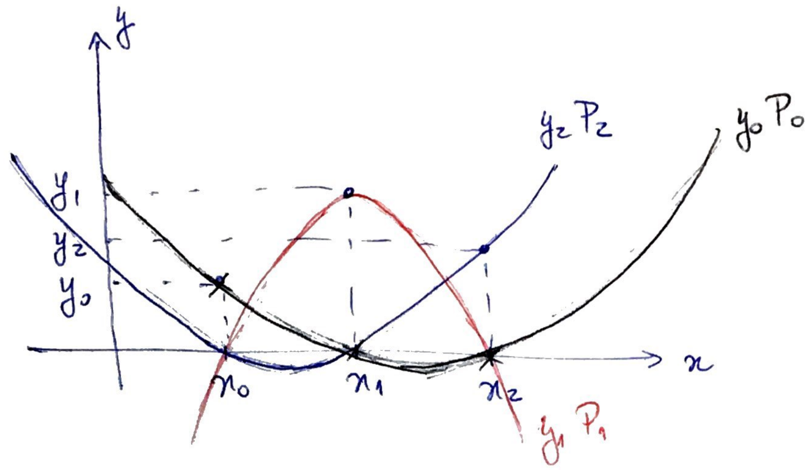
* Matriz de Vandermonde: $X \vec{a} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}_{n+1 \times n+1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n+1 \times 1} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n+1 \times 1}$$

se x_i distintos, X é não-singular ($\det(X) \neq 0$) $\rightarrow X\vec{a} = \vec{y}$ tem solução única $\rightarrow \vec{y} \in col(X)$, vetores coluna de X $\vec{x_i}$ formam uma base para o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$

* Polinômios de Lagrange:

ex) $n = 2$ (3 pontos)



$$P_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{se } x = x_1, x_2 \end{cases}$$

$$P_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_1 \\ 0, & \text{se } x = x_0, x_2 \end{cases}$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_2 \\ 0, & \text{se } x = x_0, x_1 \end{cases}$$

$$p(x) = y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + y_2 P_2(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k P_k(x) \qquad P_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

↳ polinômios característicos de Lagrange

* Aproximação de $f(x)$ por $p_n(x)$:

Erro: seja I o intervalo fechado $[a, b]$ e os nós $x_i \in I$, $i = 0, \ldots, n$. Se f é uma função continuamente diferenciável até a ordem $n+1$ em I, então:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

onde $\xi \in I$.

obs:
- $E(x_i) = 0$
- não há garantia que $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$
- se $x_{i+1} = x_i + h$ (nós igualmente espaçados):

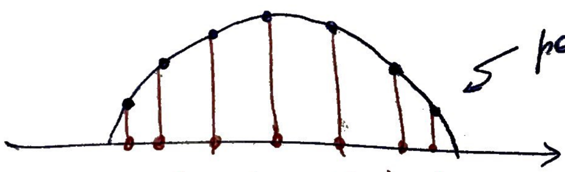
$$\max_{x \in I} |E_n(x)| \leq \underbrace{\max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|}_{\lim_{n\to\infty} = ?} \underbrace{\frac{h^{n+1}}{4(n+1)}}_{\lim_{n\to\infty} = 0}$$

* Fenômeno de Runge : oscilação nas bordas de um ajuste polinomial de alta ordem para nós igualmente espaçados

ex) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $I = [-5, 5]$ OCTAVE

* nós de Chebyshev : força uma aproximação melhor nas bordas

$$x_i = \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{centro}} - \underbrace{\frac{b-a}{2} \overbrace{\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)}^{[-1,1]}}_{\left[-\frac{b-a}{2},\ \frac{b-a}{2}\right]} , \quad i = 0, \dots, n$$



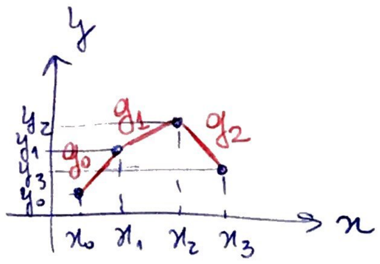
pontos equidistantes no semi-círculo unitário

nós de Chebyshev → coordenadas x (cosseno).

* Splines: interpolação polinomial por partes

Burden e Faires: 3.5 Quarteroni: 3.4 e 3.5

Dados os pontos $\{x_i, y_i\} \in [a,b]$, $i=0,\dots,n$ ($n+1$ pontos)

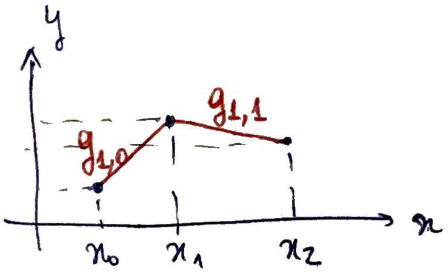


• $g_{k,i}\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $i=0,\dots,n-1$ são n polinômios de grau k.

• $g_{k,i} \in C^{k-1}([a,b]) \to$ funções contínuas (C^0) que possuem derivadas contínuas em $[a,b]$ até a ordem $k-1$.

• $g_{k,i}(x_i) = y_i$, $g_{k,i}(x_{i+1}) = y_{i+1}$

* spline linear ($k=1$): $g_{1,i} \in C^0$ (contínuas)



$$g_{1,i}(x) = a_i(x-x_i) + b_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\begin{cases} g_{1,i}(x_i) = y_i \\ g_{1,i}(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \quad \Big\} \begin{array}{l} 2n \text{ eq. e} \\ 2n \text{ incóg.} \end{array}$$

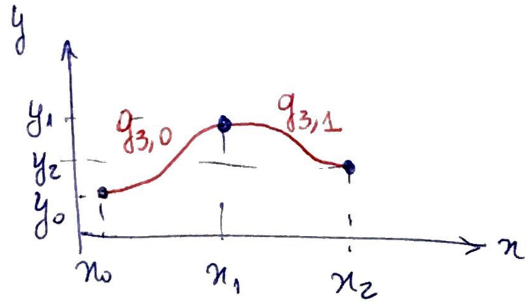
$$\begin{cases} y_i = a_i(\cancel{x_i - x_i}) + b_i \longrightarrow b_i = y_i \\ y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i \longrightarrow y_{i+1} - y_i = a_i(x_{i+1} - x_i) \end{cases}$$

$$a_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

$$\boxed{g_{1,i}(x) = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i) + y_i,} \quad x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,\dots,n-1$$

* spline cúbica: $(K = 3)$ $\quad g_{3,i} \in C^2 \begin{cases} \text{- contínua} \\ \text{- derivadas 1 e 2} \\ \text{são contínuas} \end{cases}$

- polinômio de grau 3 entre 2 pontos: subdeterminado
- condições extra: continuidade das derivadas 1ª e 2ª.



$$g_{3,i}(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

n intervalos $\rightarrow$ 4n incógnitas

$$2n \text{ eq} \begin{cases} g_{3,i}(x_i) = y_i & (1) \\ g_{3,i}(x_{i+1}) = y_{i+1} & (2) \end{cases} \qquad 2(n-1) \text{ eq} \begin{cases} g'_{3,i}(x_{i+1}) = g'_{3,i+1}(x_{i+1}) & (3)\ \{(n-1) \text{ eq} \\ g''_{3,i}(x_{i+1}) = g''_{3,i+1}(x_{i+1}) & (4)\ \{(n-1) \text{ eq.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ spline cúbica: 4n incógnitas e 4n − 2 equações.

↳ 2 condições extra: condições nos pontos extremos

defina: $h_i = x_{i+1} - x_i \qquad \eta_i = y_{i+1} - y_i$

(1) $y_i = a_i(\cancel{x_i - x_i})^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(\cancel{x_i - x_i}) + d_i \rightarrow d_i = y_i$

(2) $y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i \rightarrow \boxed{\eta_i = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i}$

(3) $g'_{3,i}(x_{i+1}) = 3a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$

$g'_{3,i+1}(x_{i+1}) = 3a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + 3b_{i+1}(\cancel{x_{i+1} - x_{i+1}}) + c_{i+1}$

$$\boxed{3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i = c_{i+1}}$$

4 $g''_{3,i}(x_{i+1}) = 6 a_i h_i + 2 b_i$

$$g''_{3,i+1}(x_{i+1}) = 6 a_{i+1}\cancel{(x_{i+1} - x_{i+1})} + 2 b_{i+1} = 2 b_{i+1}$$

$$6 a_i h_i + 2 b_i = 2 b_{i+1}$$

ou

$$3 a_i h_i + b_i = b_{i+1}$$

- isola a_i em 4 : $a_i = \dfrac{b_{i+1} - b_i}{3 h_i}$

- isola c_i em 2 : $c_i = \dfrac{\eta_i - a_i h_i^3 - b_i h_i^2}{h_i}$

(subs. a_i)

$$c_i = \frac{\eta_i}{h_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i)}{3 h_i} h_i^2 - b_i h_i$$

- substitui em 3 :

$$\cancel{3}\frac{(b_{i+1} - b_i) h_i^{\cancel{2}}}{\cancel{3 h_i}} + \cancel{2} b_i h_i + \frac{\eta_i}{h_i} - \frac{(b_{i+1} - b_i) h_i}{3} - \cancel{b_i h_i} =$$

$$= \frac{\eta_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{(b_{i+2} - b_{i+1})}{3} h_{i+1} - b_{i+1} h_{i+1}$$

$$\frac{\eta_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\eta_i}{h_i} = \frac{2}{3}(b_{i+1} - b_i) h_i + b_i h_i - \frac{1}{3}(b_{i+2} - b_{i+1}) h_{i+1} - b_{i+1} h_{i+1}$$

$$\boxed{\frac{\eta_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\eta_i}{h_i} = \frac{1}{3} h_i \underline{\underline{b_i}} + \frac{2}{3}(h_{i+1} + h_i) \underline{\underline{b_{i+1}}} + \frac{1}{3} h_{i+1} \underline{\underline{b_{i+2}}}}$$

$$
\begin{bmatrix}
? & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & ? \\
\frac{1}{3}h_0 & \frac{2}{3}(h_0+h_1) & \frac{1}{3}h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3}h_1 & \frac{2}{3}(h_1+h_2) & \frac{1}{3}h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3}h_{m-2} & \frac{2}{3}(h_{m-2}+h_{m-1}) & \frac{1}{3}h_{m-1} \\
? & ? & ? & ? & \cdots & ? & ? & ?
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} ? \\ \frac{\eta_1}{h_1} - \frac{\eta_0}{h_0} \\ \frac{\eta_2}{h_2} - \frac{\eta_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{\eta_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\eta_{m-2}}{h_{m-2}} \\ ? \end{bmatrix}
$$

? → duas condições extra nos pontos extremos.

⇒ resolve para $\vec{b}$, encontra os outros coeficientes.

ex) interpolação natural:

$$
\begin{cases}
g_{3,0}''(x_0) = 0 \\
g_{3,m-1}''(x_m) = 0
\end{cases}
$$

ex) interpolação não-é-nó: MATLAB spline

$$
\begin{cases}
g_{3,0}(x) = g_{3,1}(x) \\
g_{3,m-2}(x) = g_{3,m-1}(x)
\end{cases}
$$

(2 polinômios das extremidades são iguais, x_0 e x_m não são nós).

OCTAVE

⇒ Splines são úteis para formar bordas de objetos reais (Fig 3.11 – 3.14 do Burden e Faires, pg. 158 – 160).