



Disciplina: Matemática Aplicada a Finanças.

Professor: Daniel Ferreira Caixe.





Matemática Aplicada a Finanças

Aula: Sistemas de Amortização.

Professor: Daniel Ferreira Caixe.



ESALQ

Agenda



ESALQ

- Sistema de Prestação Constante (SPC); e
- Custo Efetivo Total.



ESALQ

Empréstimo/Financiamento



ESALQ

➤ São operações que estabelecem uma **relação de crédito** entre:

(1) Devedor (tomador ou mutuário); e

(2) Credor (emprestador ou mutuante).

❖ **(1)** capta recursos de **(2)** e compromete-se a devolvê-los acrescidos de determinada remuneração.



ESALQ

Empréstimo/Financiamento



ESALQ

▪ Qual é a diferença entre empréstimo e financiamento?

○ **Empréstimo:**

➤ Sem restrições de uso (pode usá-lo como quiser).

○ **Financiamento:**

➤ Deve ser usado para uma finalidade específica;

✓ Exemplos: aquisições de imóveis, veículos, equipamentos etc.



ESALQ

Notação



ESALQ

(a) Principal (VP):

- Valor do emprestado / financiado;
- ✓ Sinônimos: valor de emissão e valor nominal.



ESALQ

Notação



ESALQ

(b) Juros monetários (J):

- Encargos (despesas) financeiros da operação;
- ✓ Custo para o devedor e retorno para o credor;
- Tipos:
 - Prefixados; ou
 - Pós-fixados.



ESALQ

Notação



ESALQ

(c) Amortização (A):

- Pagamento do principal (capital emprestado/financiado);
- ✓ Efetuado em parcelas periódicas ou em parcela única.



ESALQ

Notação



ESALQ

(d) Saldo Devedor (SD):

- Valor líquido do principal da dívida:
- ✓ Após a dedução do valor já pago até aquele momento com amortizações.



ESALQ

Notação



ESALQ

(e) Prestação (PMT):

- Valor da amortização mais os encargos financeiros pagos em determinado período;
- Formada por parcelas periódicas (mensais, semestrais, anuais etc.).

$$\text{PMT} = A + J$$



ESALQ

Sistemas de Amortização



ESALQ

- Tratam, basicamente, da forma pela qual:
 - ✓ Principal; e
 - ✓ Encargos financeiros;
 - São restituídos ao credor do capital.



ESALQ

Sistemas de Amortização



ESALQ

- Sistema de Amortização Constante (SAC);
- Sistema de Prestação Constante (SPC);
- Sistema de Amortização Misto (SAM); e
- Sistema de Amortização Americano (SAA).

SPC

(I) Sistema de Prestação Constante (SPC):

- Conhecido como **Sistema de Amortização Francês (SAF)**;
- ✓ **Mais utilizado** no Brasil e no mundo;
- ❖ No Brasil: **Sistema Price ou Tabela Price**.



ESALQ

SPC



ESALQ

- **Principal característica:**

- Prestações iguais, periódicas e sucessivas (**PMT**):

- ✓ Modelo-padrão: **SUP definida.**



ESALQ

SPC



ESALQ

- **Por que as prestações são constantes?**
 - Os juros são decrescentes (por incidirem sobre o saldo devedor); e
 - As parcelas de amortização são crescentes (exponencialmente).



ESALQ

Expressões do SPC



ESALQ

(e) Prestação (PMT):

- Pela equação do valor presente da SUP definida:

$$PMT = VP_0 \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-m}}$$



ESALQ

Expressões do SPC



ESALQ

(d) Saldo Devedor (SD):

➤ Diferença entre o principal devido no início e a amortização do período:

$$SD_t = SD_{t-1} - A_t$$

$$SD_t = PMT \times FVP(i, m - t)$$

$$SD_t = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-(m-t)}}{i}$$



ESALQ

Expressões do SPC



ESALQ

(b) Juros (J):

- Incide sobre o SD apurado no início de cada período (final de cada período imediatamente anterior).

$$J_1 = SD_0 \times i = VP \times i$$

$$J_2 = SD_1 \times i = (VP - A_1) \times i$$

$$J_3 = SD_2 \times i = (VP - A_1 - A_2) \times i$$



ESALQ

Expressões do SPC



ESALQ

(b) Juros (J):

➤ Logo:

$$J_t = SD_{t-1} \times i$$



ESALQ

Expressões do SPC



ESALQ

(c) Amortização (A):

➤ Diferença entre o valor da prestação (PMT) e o dos juros (J):

$$A_t = \text{PMT} - J_t$$

$$A_t = A_1 \times (1 + i)^{t-1}$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

Um empréstimo de R\$ 100.000,00 deve ser pago em dez prestações semestrais postecipadas, iguais, periódicas e sucessivas. A taxa de juros considerada na operação é de 5% ao semestre. Calcule:

- (a) O valor da prestação.
- (b) O saldo devedor no final do quinto semestre.
- (c) Os juros pagos no oitavo semestre.
- (d) O valor amortizado no décimo semestre.



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

(a) O valor da prestação.

$$\text{PMT} = \text{VP}_0 \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-m}}$$

$$\text{PMT} = 100.000 \times \frac{0,05}{1 - (1 + 0,05)^{-10}} \cong \text{R\$ } 12.950,46$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

(b) O saldo devedor no final do quinto semestre.

$$SD_t = PMT \times \frac{1 - (1 + i)^{-(m-t)}}{i}$$

$$SD_5 = 12.950,46 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-(10-5)}}{0,05} = \text{R\$ } 56.068,71$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

(c) Os juros pagos no oitavo semestre.

$$J_8 = SD_7 \times i$$

$$J_8 = 12.950,46 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-(10-7)}}{0,05} \times 0,05$$

$$J_8 = \text{R\$ } 1.736,37$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

(d) O valor amortizado no décimo semestre.

$$A_t = A_1 \times (1 + i)^{t-1}$$

$$A_t = (PMT - J_1) \times (1 + i)^{t-1}$$

$$A_t = (PMT - VP \times i) \times (1 + i)^{t-1}$$

$$A_{10} = (12.950,46 - 100.000 \times 0,05) \times (1 + 0,05)^{10-1} = \text{R\$ } 12.333,77$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

Períodos	Saldo Devedor (R\$)	Amortização (R\$)	Juros (R\$)	Prestação (R\$)
0	100.000,00			
1	92.049,54	7.950,46	5.000,00	12.950,46
2	83.701,56	8.347,98	4.602,48	12.950,46
3	74.936,18	8.765,38	4.185,08	12.950,46
4	65.732,53	9.203,65	3.746,81	12.950,46
5	56.068,70	9.663,83	3.286,63	12.950,46
6	45.921,68	10.147,02	2.803,44	12.950,46
7	35.267,31	10.654,37	2.296,08	12.950,46
8	24.080,22	11.187,09	1.763,37	12.950,46
9	12.333,77	11.746,45	1.204,01	12.950,46
10	0,00	12.333,77	616,69	12.950,46
Total		100.000,00	29.504,57	129.504,57



ESALQ

Funções no Excel



ESALQ

(I) PGTO:

- Calcula o PMT de uma série uniforme de FCs;
- ✓ Argumentos: taxa de juros; número de prestações; valor presente; e
- Tipo: 0 ou omitido para postecipada; e 1 para antecipada.

(II) VP:

- Calcula o valor presente de uma série uniforme de FCs;
- ✓ Argumentos: taxa de juros; número de prestações; valor da prestação; e
- Tipo: 0 ou omitido para postecipada; e 1 para antecipada.



ESALQ

Qual é taxa da operação?



ESALQ

- **Taxa cotada (TC):**
 - Divulgada na cotação do produto;
 - ✓ Não é líquida de despesas com tarifas, comissões e impostos.

- **Custo Efetivo Total (CET):**
 - ✓ Taxa líquida das despesas com tarifas, comissões e impostos.

- ❖ **A decisão de captação deve basear-se no CET!**



ESALQ

Despesas da Operação (DO)



ESALQ

- **IOF:** Imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguros;
- **TAC:** Tarifa de Cadastro;
- **TAB:** Tarifa de Avaliação do Bem (Financiamento);
- **ER:** Emolumentos de Registro (Cartório) (Financiamento);
- **SP:** Seguro prestamista (credor é o beneficiário).



ESALQ

IOF



ESALQ

▪ Incide de **duas formas**:

(i) Alíquota única de 0,38% sobre o valor total devido (sem impostos);

(ii) Alíquota adicional de:

- 0,0082% ao dia (PF) ou 0,0041% ao dia (PJ) sobre o valor total devido (sem impostos) até o 365º dia;
- No prazo do produto que exceder a 365 dias não há IOF adicional.

❖ **Momento da cobrança:**

✓ Geralmente, na data da captação dos recursos.



ESALQ

TAC, TAB e SP



ESALQ

➤ Despesa **variável** da operação:

✓ Difere entre os produtos de um mesmo banco e entre bancos para o mesmo produto;

- Assim como o **IOF**:

✓ Pode alterar significativamente o **CET** do produto.

❖ **Momento da cobrança:**

✓ Geralmente, na data da captação dos recursos.



ESALQ

Taxa no SPC



ESALQ

- É taxa de juros periódica do empréstimo/financiamento;
- É a Taxa Interna de Retorno:
- ✓ É taxa de desconto com a qual empréstimo/financiamento atinge seu ponto de equilíbrio econômico.



ESALQ

Taxa no SPC



ESALQ

- Ponto de equilíbrio econômico:

$$VPL = \sum_{t=1}^m \frac{PMT}{(1+i)^t} - VP_0 = 0$$

$$VPL = PMT \times \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} - VP_0 = 0$$

Em que: VPL = Valor Presente Líquido; PMT = prestação; i = Taxa Interna de Retorno (TIR); m = número de prestações; e VP = principal da operação.



ESALQ

Taxa no SPC



ESALQ

❖ Como calcular i (TIR)?

➤ Pela solução de uma equação polinomial de grau m :

✓ Antigamente: **Método da “Tentativa e Erro”**;

✓ **Atualmente:**

- HP 12C;
- Softwares (exemplo: Microsoft Excel).



ESALQ

Taxa Cotada (TC)



ESALQ

- Ponto de equilíbrio econômico:

$$\text{VPL} = \text{PMT} \times \frac{1 - (1 + \text{TC})^{-m}}{\text{TC}} - \text{VTD}_0 = 0$$

- ❖ Valor Total Devido / Principal (VTD_0):

$$\text{VTD}_0 = \text{Valor Líquido Liberado}_0 + \text{Despesas da Operação}_0$$



ESALQ

Custo Efetivo Total (CET)



ESALQ

- Ponto de equilíbrio econômico:

$$\text{VPL} = \text{PMT} \times \frac{1 - (1 + \text{CET})^{-m}}{\text{CET}} - \text{VLL}_0 = 0$$

- ❖ Valor Líquido Liberado (**VLL₀**):

$$\text{VLL}_0 = \text{Valor Total Devido}_0 - \text{Despesas da Operação}_0$$



ESALQ

Custo Efetivo Total (CET)



ESALQ

- Conselho Monetário Nacional (**CMN**):

- Resolução do **nº 4.881/2020**:

- ✓ Divulgação obrigatória do CET.



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

Ainda em relação ao exemplo I, assuma que: os R\$ 100.000,00 se referem ao valor total devido pelo cliente ao banco; 5% ao semestre é a taxa cotada; e R\$ 96.000 é o VTD sem IOF. No momento da contratação, considere que também foram cobrados tarifa de cadastro e seguro prestamista de R\$ 1.000 e R\$ 3.000, respectivamente. Qual é o custo efetivo total do empréstimo?



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

▪ Despesas da operação:

$$DO = IOF_{\text{parcela única}} + IOF_{\text{adicional}} + TAC + SP$$

$$DO = 0,0038 \times 96.000 + 0,000082 \times 365 \times 96.000 + 1.000 + 3.000$$

$$DO = \text{R\$ } 7.238,08$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

- **Valor Líquido Liberado:**

$$\text{VLL} = 100.000 - 7.238,08$$

$$\text{VLL} = \text{R\$ } 92.761,92$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

- Ponto de equilíbrio econômico:

$$VPL = PMT \times \frac{1 - (1 + CET)^{-m}}{CET} - VLL_0 = 0$$

$$VPL = 12.950,46 \times \frac{1 - (1 + CET)^{-10}}{CET} - 92.761,92 = 0$$

$$CET \cong 0,0658 = 6,58\% \text{ a. s.}$$



ESALQ

Exemplo II



ESALQ

Comando	Significado
f REG	Limpa os registradores/memoria
10 n	Registra o número de prestações
92761.92 PV	Registra o VLL
12950.46 CHS PMT	Registra o pagamento periódico
i	Calcula o CET



ESALQ

Funções no Excel



ESALQ

(III) TAXA:

- Calcula a taxa de juros de uma série uniforme de FCs;
- ✓ Argumentos: número de prestações; prestação; valor presente; e
 - Tipo: 0 ou omitido para postecipada; e 1 para antecipada.



ESALQ

Referências



ESALQ

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira:** edição universitária. 2. ed. Barueri: Atlas, 2022.

VIEIRA SOBRINHO, J. D. **Matemática Financeira.** 8. ed. São Paulo: Atlas, 2023.