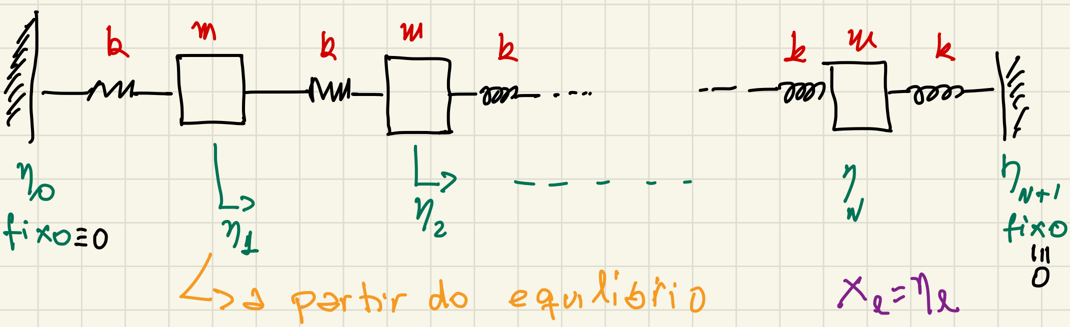
A solução geral é

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = (A+Bt)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\varphi_1\right]$$

$$+ D\begin{pmatrix}1\\-2m\\M\end{pmatrix}\cos\left[\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}\,t+\varphi_2\right]$$

13/6/23

<u>Exemplo</u>: Consideremos o seguinte sistema de N corpos:



$$V(\eta_1 \dots \eta_N) = \sum_{j=0}^{N} \frac{k}{2}\left(x_{j+1}-x_j\right)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_j k\,(x_{j+1}-x_j)\left[\delta_{i\,j+1}-\delta_{ij}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_l\,\partial x_i} = k\sum_j \left(\delta_{l\,j+1}-\delta_{jl}\right)\left(\delta_{i\,j+1}-\delta_{ij}\right) = k\left[2\delta_{il}-\delta_{l\,i-1}-\delta_{l\,i+1}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_l\,\partial x_i} = V_{li}$$

$T_{\ell i} = m\,\delta_{\ell i}$

Definindo $\omega_0^2 = k/m$ temos que

$$-\omega^2 z_\ell^{(0)} = V_{\ell i} z_i^{(0)} = -\omega_0^2 \left(z_{\ell+1}^{(0)} - 2 z_\ell^{(0)} + z_{\ell-1}^{(0)} \right).$$

Note que: $\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) z_\ell^{(0)} = \omega_0^2 \left(z_{\ell+1}^{(0)} + z_{\ell-1}^{(0)} \right)$

$$\Rightarrow \frac{z_{\ell+1}^{(0)} + z_{\ell-1}^{(0)}}{2\, z_\ell^{(0)}} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \equiv \text{independente de } \ell!$$

Usemos esse fato para obter os $z_\ell^{(0)}$! Para isso tentamos $A_\ell = \alpha \cos(\ell\theta) + \beta \operatorname{sen}(\ell\theta)$

Com isso

$$z_{\ell+1}^{(0)} = \alpha \cos(\ell\theta + \theta) + \beta \operatorname{sen}(\ell\theta + \theta)$$

$$= \alpha \cos(\ell\theta)\cos\theta - \alpha \operatorname{sen}(\ell\theta)\operatorname{sen}\theta) + \beta \operatorname{sen}(\ell\theta)\cos\theta + \beta\cos(\ell\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Analogamente

$$z_{\ell-1}^{(0)} = \alpha \cos(\ell\theta)\cos\theta + \alpha \operatorname{sen}(\ell\theta)\operatorname{sen}\theta + \beta \operatorname{sen}(\ell\theta)\cos\theta - \beta\cos(\ell\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow z_{\ell+1}^{(0)} + z_{\ell-1}^{(0)} = 2\cos\theta\left[\alpha\cos(\ell\theta) + \beta\operatorname{sen}(\ell\theta)\right] = 2\, z_\ell^{(0)} \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta$$

Ainda temos que determinar θ e ω^2!!!

Por ora, temos 2 soluções

$$\begin{cases} \left[\alpha \cos(l\theta) + \beta \operatorname{sen}(l\theta)\right] e^{i\omega t} \\ \left[\gamma \cos(l\theta) + \beta \operatorname{sen}(l\theta)\right] e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Logo a solução geral é

$$\eta_l = \cos(l\theta)\left[\alpha e^{i\omega t} + \gamma e^{-i\omega t}\right] + \operatorname{sen}(l\theta)\left[\beta e^{i\omega t} + \delta e^{-i\omega t}\right]$$

Para que η_l seja real $\Rightarrow \alpha = \gamma^*$ e $\beta = \delta^*$

Note que falta aplicar as condições de contorno, isto é

$\eta_0 \equiv 0$ e $\eta_{N+1} \equiv 0$!

$$\alpha = \frac{B_1 e^{i\varphi_1}}{2}$$

$$\eta_0 \equiv 0 \Rightarrow \left(\alpha e^{i\omega t} + \gamma e^{-i\omega t}\right) = B_1 \cos[\omega t + \varphi_1] = 0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} B_1 = 0$$

$$\beta = \frac{B_2}{2} e^{i\varphi_2}$$

$$\eta_{N+1} = 0 \Rightarrow \operatorname{Sen}((N+1)\theta)\left[\beta e^{i\omega t} + \beta^* e^{-i\omega t}\right] = B_2 \operatorname{sen}((N+1)\theta)\cos(\omega t + \varphi_2)$$

Para termos uma solução não nula $\Rightarrow \operatorname{sen}((N+1)\theta) = 0$

$\Rightarrow (N+1)\theta = j\pi$ com $j = 1, \ldots\ldots, N$

Com ~~isso~~: $\dfrac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta \Rightarrow \omega_j^2 = 2\omega_0^2\left[1 - \cos\left(\dfrac{j\pi}{N+1}\right)\right]$

obtivemos N frequências como esperado!

Por outro lado os modos normais são:

$$\eta_l = B_2 \operatorname{sen}\left(\frac{l j \pi}{N+1}\right)\cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

Alguns casos particulares:

<u>N=2</u>

$j=1: \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 \qquad z_1^{(0)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$j=2 \quad \omega_2^2 = 3\omega_0^2 \qquad z_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2\pi/3) \\ \operatorname{sen}(4\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Concorda com o resultado de exemplo anterior.

<u>N=3</u>

$j=1 \Rightarrow \omega_1^2 = [2-\sqrt{2}]\,\omega_0^2 \qquad z_1^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$j=2 \Rightarrow \omega_2^2 = 2\omega_0^2 \qquad z_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$j=3 \Rightarrow \omega_3^2 = \omega_0^2(2+2\sqrt{2}) \qquad z_3^{(0)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

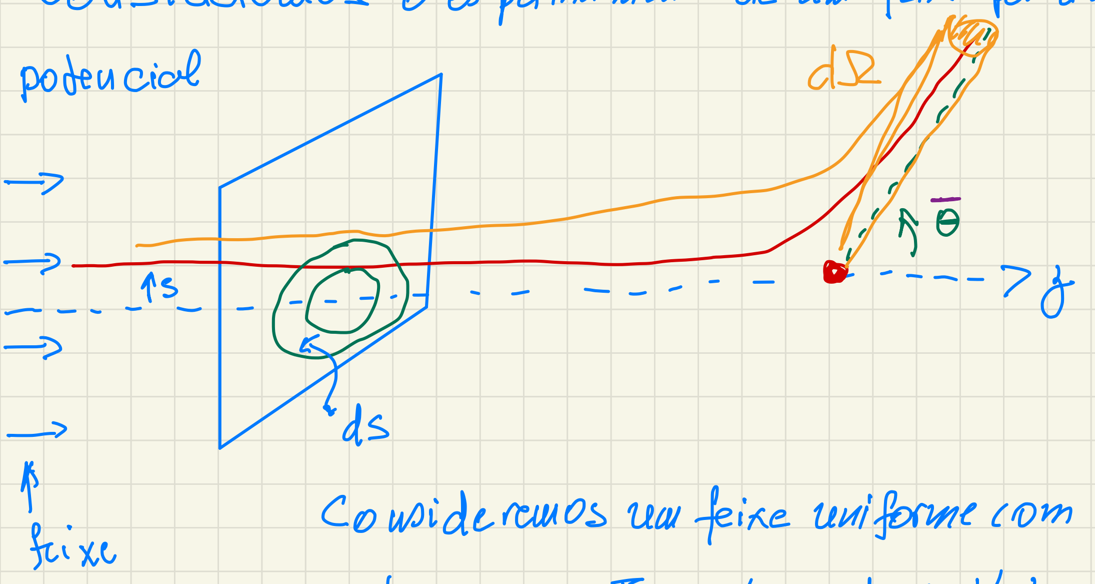
<u>etc .....</u>

VIII - Espalhamento

VIII.1 Fatos básicos

No estudo de potenciais centrais vimos que podem existir órbitas limitadas no espaço bem como órbitas que estendem-se até o infinito. Foquemos nas segundas, i.e. no espalhamento. Espalhamento é uma ferramenta poderosa para estudar a matéria em várias escalas de distâncias/energias.

Consideremos o espalhamento de um feixe por um potencial



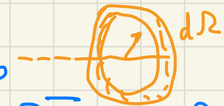
Consideremos um feixe uniforme com intensidade $I = \dfrac{\text{número de partículas}}{\text{área perp. ao feixe} \times \text{tempo}}$

Após interagir com o feixe as partículas as trajetórias serão retas suficientemente longe do potencial.

$\theta \equiv$ ângulo entre direção final e a inicial.

<u>Conceito fundamental</u>: seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega)\, d\Omega = \frac{\text{número part. no ângulo sólido } d\Omega\,/\,\text{tempo}}{I}$$



Por simplicidade assumimos $V(r)$: $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$s \equiv$ parâmetro de impacto da partícula (rígida)

O momento angular de uma partícula com velocidade v_0 é $\quad L = m v_0 s \quad$ com respeito ao centro do potencial.

<u>Note</u> que dado <u>s</u> temos $\bar{\theta}$ univocamente. Logo as partículas passando entre s e $s + ds$ no plano perpendicular ao feixe são espalhadas para $d\Omega$:

$$\frac{\text{partículas}}{\text{tempo}} \text{ em } d\Omega = I\, 2\pi s |ds| = 2\pi \sin(\bar{\theta}) |d\bar{\theta}|\, \frac{d\sigma}{d\Omega} I$$

Note que a energia da partícula é E e longe do potencial $E = \frac{1}{2} m v_0^2$. Em geral,

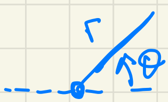
$$s = s(\theta, E)$$

Logo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin\bar{\theta}} \left| \frac{ds}{d\bar{\theta}} \right|}$$

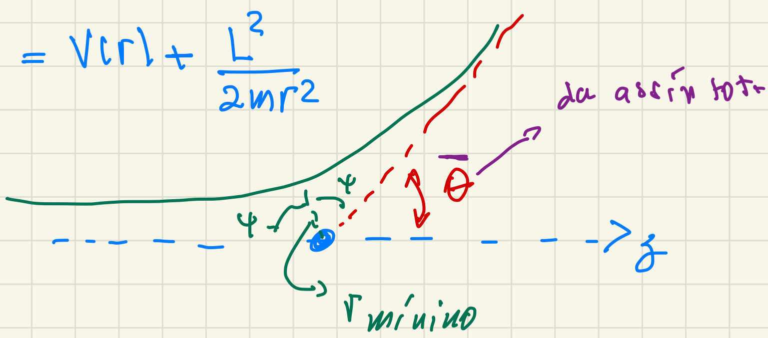
15/6/23

Note que $s(\theta, E)$ pode ser obtido da órbita da partícula. Como já visto



$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{E - V_{ef}(r')}} + \theta_0$$

onde $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$



Tomando o ângulo ψ na aproximação mínima do centro do potencial, por simetria

$$\bar{\Theta} = \pi - 2\psi$$