Aula 23 e 24: Propriedades locais de conexidade, Homotopia, Grupo Fundamental

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Propriedades locais de conexidade

Vamos apresentar versões locais das propriedades de conexidade apresentadas anteriormente.

Definição 1

Um espaço topológico (X, τ) *é* ***localmente conexo por caminhos*** *se todo ponto de* X *admite uma base local (de abertos) conexa por caminhos.*

Conexidade local por caminhos é suficiente para fazer um espaço conexo ser conexo por caminhos.

Proposição 2

Se (X, τ) *é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, então* (X, τ) *é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e

$$C = \{y \in X : \text{ existe um caminho de } x \text{ para } y\}.$$

Vamos mostrar que C é aberto e fechado (portanto, $C = X$, pelo Exercício 2 da Aula 18).

C é aberto.

Seja $y \in C$. Como X é localmente conexo por caminhos, existe A aberto e localmente conexo por caminhos tal que $y \in A$. Note que, se mostrarmos que $A \subset C$, teremos que C é aberto. Assim, seja $a \in A$. Como $a \in C$, existe um caminho de y para a. Como existe um caminho de x para y, temos que existe um caminho de x para a (pelo Exercício 3 da Aula 22). Logo, $a \in C$ como queríamos.

C é fechado.

Seja $y \in X \backslash C$. Como X é localmente conexo por caminhos, existe A aberto e conexo por caminhos tal que $y \in A$. Note que, se mostrarmos que $A \cap C = \emptyset$, terminamos. Suponha que não. Seja $b \in C \cap A$. Como $b \in C$, existe um caminho de x para b e, como $b \in A$, existe um caminho de y para b. Logo, existe um caminho de x para y, contradição.

Definição 3

Um espaço topológico (X, τ) *é localmente conexo se todo ponto admite uma base local (de abertos) conexa.*

Exemplo 4

O exemplo do pente (da Aula 22) com o ponto $(0, 0)$ *incluído é um espaço conexo por caminhos.*

Exemplo 5

O exemplo do pente (da Aula 22), com ou sem $(0, 0)$*, é um conexo que não é localmente conexo.* — *Pensar nos pontos da forma* $(0, y)$*, com* $y > 0$

Exemplo 6

$[0, 1) \cup (1, 2]$ *é localmente conexo, mas não é conexo.*

Proposição 7

Se (X, τ) é localmente conexo, então todo ponto de X tem componente conexa aberta.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e C componente conexa de x. Seja $y \in C$. Como X é localmente conexo, existe A aberto e conexo tal que $y \in A$. Note que $C \cup A$ é conexo (pois $y \in C \cap A$). Assim, como C é o maior conexo contendo x, temos que $C \cup A \subset C$. Ou seja, $A \subset C$ e portanto C é aberto.

Exercícios

1. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é localmente conexo.
2. Dê um exemplo de um espaço tal que toda componente conexa seja aberta, mas que não seja localmente conexo.

Um tipo de aplicação em que argumentos sobre conexidade são bastante comuns é mostrar que certos espaços não são homeomorfos.

Proposição 8

$\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^2$ *não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo. Então $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Mas $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ não é conexo, enquanto $\mathbb{R}^2\backslash\{f(0)\}$ é.

Proposição 9

$[0, +\infty)$ *e* $\mathbb{R}$ *não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ homeomorfismo. Então $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}\backslash\{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Contudo, $(0, +\infty)$ é conexo enquanto que $\mathbb{R}\backslash\{f(0)\}$ não é.

Proposição 10

$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ *não é homeomorfo a qualquer subespaço de* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que exista $f : S^1 \to A \subset \mathbb{R}$ homeomorfismo. Como S^1 é conexo (basta notar que S^1 é imagem contínua de um intervalo da reta), segue que A é um conexo de $\mathbb{R}$, isto é, A é um intervalo. Considere $a \in A$ tal que a não seja uma extremidade de A (isto é, existem $b, c \in A$ tais que $b < a < c$). Então $f : S^1 \backslash \left\{f^{-1}(a)\right\} \to A \backslash \{a\}$ é um homeomorfismo, mas $S^1 \backslash \left\{f^{-1}(a)\right\}$ é conexo e $A \backslash \{a\}$ não é.

Exemplo 11 (No mundo real, literalmente)

Considere a superfície da Terra T com a métrica usual. Vamos supor que a função $t : T \to \mathbb{R}$, onde $t(x)$ é a temperatura no local x, seja contínua. Então existem dois pontos antípodas na Terra (isto é, simétricos em relação ao centro da Terra) que possuem a mesma temperatura.

De fato, considere $F : T \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = t(x) - t(y)$ onde y é o ponto antípoda de x. Temos que F é uma função contínua (a função que leva x no seu antípoda é contínua). Seja x_0 um ponto qualquer em T e seja y_0 seu antípoda. Seja $f : [0,1] \to T$ uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = y_0$. Note que $F(f(0)) = -F(f(1))$. Assim, pelo Teorema do valor intermediário, temos que existe $r \in [0,1]$ tal que $F(f(r)) = 0$. Isto é, $f(r)$ é um ponto em que sua temperatura é a mesma que a do seu antípoda.

Exercícios

1. Mostre que $[0,1)$ e $(0,1)$ não são homeomorfos em $\mathbb{R}$.
2. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo (com a topologia da ordem). Mostre que $\leq$ é uma ordem densa.
3. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo. Mostre que $\leq$ é uma ordem completa.
4. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elementos, separável e conexo. Mostre que $(X, \leq)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
5. Mostre que se $X \times Y$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, então X é unitário ou Y é unitário.
6. Fixe $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. Mostre que não existe $f : B_r(x) \to I$ homeomorfismo, onde I é um intervalo.

7. Este é um roteiro para se mostrar que não existem funções de Peano injetoras. Suponha que exista $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ contínua e bijetora.
   (a) Note que f é um homeomorfismo.
   (b) Conclua que existem $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$ tais que $B_r(x)$ e I são homeomorfos, onde I é um intervalo. Note que isso é uma contradição.
8. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ contínua e injetora. Mostre que a imagem de f tem interior vazio.

Começamos com uma definição de quando uma função pode ser obtida de uma outra a partir de uma "deformação".

Definição 12

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é homotópica a g se existe uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que H é uma homotopia entre f e g. Notação: $f \simeq g$.

Um jeito de imaginar essa situação é uma analogia temporal: pense em $H(x,t)$ como uma família de funções variando com o tempo - representado com a variável t. Assim, a cada instante t_0, temos que $H(\cdot, t_0) : X \to Y$ uma função contínua. Além disso, a mudança das funções ao longo do tempo é contínua e as funções inicial e final são, respectivamente, f e g.

Vejamos um exemplo simples, mas que terá algumas consequências importantes.

Exemplo 13

Em $\mathbb{R}^n$*, considere* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x) = x$ *e* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $g(x) = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*. Então,* $f \simeq g$*.*

De fato, basta tomar $H(x, t) = (1 - t)x$.

Na verdade, a convexidade nos permite generalizar o truque anterior.

Exemplo 14

Sejam $A \subset E$ *um conjunto convexo de um espaço vetorial normado real* E *e* (X, τ) *espaço topológico. Então quaisquer* $f, g : X \to A$ *funções contínuas são homotópicas.*

Basta tomar $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$.

Se estamos interessados em como funções podem ser deformadas umas nas outras, é interessante notar que essa relação é uma relação de equivalência.

Proposição 15

$\simeq$ é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

Demonstração. Vamos provar a transitividade, deixando as outras como exercício. Sejam $f, g, h : X \to Y$ funções contínuas tais que $f \simeq g \simeq h$. Vamos mostrar que $f \simeq h$. Sejam H_1 e H_2 tais que, para todo $x \in X$,

$$\begin{array}{ll} H_1(\cdot, 0) = f & H_2(\cdot, 0) = g \\ H_1(\cdot, 1) = g & H_2(\cdot, 1) = h \end{array}$$

Defina

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note então que $X \times [0, 1/2]$ e $X \times [1/2, 1]$ são dois fechados de $X \times [0, 1]$ - Prova 1.

Definição 16

As classes de equivalência da relação $\simeq$ são chamadas de classes de homotopia.

O próximo resultado tem demonstração puramente técnica. Mas é bastante útil e sua demonstração ilustra bem como proceder quando homotopias precisam ser construídas explicitamente em função de outras.

Proposição 17

Composições de funções homotópicas são homotópicas.

Demonstração. Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ e (Z, μ) espaços topológicos e sejam $f_1, f_2 : X \to Y$ tais que $f_1 \simeq f_2$ e $g_1, g_2 : Y \to Z$ tais que $g_1 \simeq g_2$.

Vamos mostrar que $g_1 \circ f_1$ é homotópica a $g_2 \circ f_2$.

Sejam H_f e H_g tais que

$$H_f(\cdot, 0) = f_1 \quad H_g(\cdot, 0) = g_1$$
$$H_f(\cdot, 1) = f_2 \quad H_g(\cdot, 1) = g_2.$$

Defina $\bar{H}(x, t) = H_g(f_1(x), t)$. Note que $\bar{H}(\cdot, 0) = g_1 \circ f_1$ e $\bar{H}(\cdot, 1) = g_2 \circ f_1$. Portanto, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_1$

Defina $\tilde{H}(x,t) = g_2\,(H_f(x,t))$. Note que $\tilde{H}(\cdot,0) = g_2 \circ f_1$ e $\tilde{H}(\cdot,1) = g_2 \circ f_2$. Portanto, $g_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. Logo, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Com o que temos, já podemos definir um importante invariante topológico.

Definição 18

Um espaço topológico (X, τ) *é dito* ***contrátil*** *se* $Id_X : X \to X$ $(Id_X(x) = x$ *, para* $x \in X)$ *é homotópica a alguma função constante.*

Formalmente, o espaço é contrátil se existe uma função constante homotópica à função identidade.

Na prática, nessa situação a função identidade é homotópica a qualquer função constante (exercício - leve em consideração a Proposição 20 a seguir).

Para maior clareza, vamos utilizar o seguinte abuso de notação: dado $c \in X$, denotaremos também por c a função constante $x \mapsto c$ (a função que leva todo $x \in X$ em c).

O exemplo que fizemos anteriormente nos dá o seguinte resultado.

Exemplo 19

Seja $A \subset E$ um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado E. Então A é contrátil.

Demonstração: Fixe $x_0 \in A$ e defina $H(x,t) = (1-t)x_0 + tx$ para $(x,t) \in A \times [0,1]$.

Aula 23 parou aqui

Em vez de apresentar um exemplo explícito de espaço não contrátil, apresentamos uma implicação que já nos garante uma gama grande de exemplos.

Proposição 20

Se (X,τ) é contrátil, então (X,τ) é conexo por caminhos.

Demonstração. Seja $c \in X$ tal que $id_X \simeq c$. Note que é suficiente mostrarmos que, para todo $a \in X$, existe um caminho de a para c. Seja H tal que $H(x,0) = x$ e $H(x,1) = c$. Note que $\gamma : [0,1] \to X$ dada por $\gamma(t) = H(a,t)$ é o caminho desejado.

O próximo resultado dá uma caracterização externa para os espaços contráteis.

Proposição 21

Um espaço topológico (X, τ) *é contrátil se, e somente se, para todo espaço topológico* (T, σ) *e para todas as funções contínuas* $f, g : T \to X$ *contínuas temos que* $f \simeq g$*.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Basta tomar $T = X, f = Id_X$ e g alguma função constante.
$(\Rightarrow)$ Suponha que $Id_X \simeq c$ para algum c. Sejam $f, g : T \to X$ funções contínuas.
Lembrando que $f \simeq f$ e $g \simeq g$ e que compostas de homotópicas são homotópicas, temos:

$$f = Id_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq Id_X \circ g = g$$

Logo, $f \simeq g$.

Podemos generalizar o conceito de homeomorfismo neste contexto.

Definição 22

Espaços topológicos (X, τ) e (Y, σ) são ditos homotopicamente equivalentes se existem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Neste caso, g é dita uma inversa homotópica de f (e vice versa).

Note que, de fato, espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes.

Mas a recíproca não é verdadeira, como o próximo resultado ilustra.

Proposição 23

Um espaço topológico (X, τ) é contrátil se, e somente se, (X, τ) é homotopicamente equivalente a um espaço unitário.

Demonstração. Suponha (X, τ) contrátil, ou seja, $Id_X \simeq c$ para algum $c \in X$. Sejam $Y = \{c\}$ e $j : Y \to X$ a função inclusão. Note que $c \circ j = Id_Y$ e $j \circ c = c \simeq Id_X$ por hipótese.

Agora suponha que $f : X \to \{a\}$ e $g : \{a\} \to X$ são inversas homotópicas. Note que $g \circ f$ é constante $(= g(a))$ e, por hipótese, $g \circ f \simeq Id_X$.

Essa ideia de “reduzir” o espaço a um ponto pode ser generalizada - e algumas consequências são análogas.

Definição 24

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Dizemos que o conjunto* $A \subset X$ *é um retrato de* X *se existe uma função contínua* $r : X \to A$ *(chamada de retração) tal que* $r(a) = a$*, para todo* $a \in A$*. Se* $r \simeq Id_X$ *chamamos a retração de retração de deformação.*

Proposição 25

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Se o conjunto* $A \subset X$ *é uma retração de deformação, então* A e X *são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. Sejam $j : A \to X$ a função inclusão e r a retração de deformação. Note que $r \circ j = Id_A$ e $j \circ r = r \simeq Id_X$.

Vejamos agora como formalizar a ideia de deformação entre caminhos.

Definição 26

Seja (X, τ) *espaço topológico. Sejam* $f, g : [0, 1] \to X$ *dois caminhos. Dizemos que* *f e g são caminhos homotópicos* *se existe* $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ *homotopia entre* f *e* g *tal que* $H(0, \cdot)$ *e* $H(1, \cdot)$ *são funções constantes.*

Note que, em particular, $f(0) = H(0, 0) = H(0, 1) = g(0)$ e $f(1) = H(1, 0) = H(1, 1) = g(1)$.

1. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é contrátil.
2. Mostre se X é contrátil, então $id_X \simeq c$, para qualquer c constante.
3. Mostre que $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ é contrátil (apesar de não ser convexo).
4. Mostre que $\left\{\left(x, x^2\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$ é contrátil (cuidado com o caminho).
5. Sejam $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e $S^1 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$.
   (a) Mostre que $r : X \to S^1$ dada por $r(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$ é uma retração de deformação.
   (b) Mostre que X e S^1 são homotopicamente equivalentes.
6. Considere $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ com a topologia induzida. Sejam X espaço qualquer e $f, g : X \to S^2$ funções contínuas tais que $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$. Mostre que f e g são homotópicas.
7. Mostre que o espaço do pente (com o ponto $(0,0)$) é contrátil.

8. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Sejam A tal que $f\lceil A = g\lceil A$. Dizemos que f e g são homotópicas relativamente a A se existe uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ entre f e g tal que, para qualquer $a \in A$, $H(a,\cdot)$ é constante. Mostre que se f e g são caminhos entre a, b, então f e g são caminhos homotópicos se, e somente se, f e g são homotópicas relativamente a $\{0,1\}$.
9. Este é um roteiro para dar um exemplo de um espaço contrátil para um ponto x_0 mas tal que a identidade não é homotópica relativamente a $\{x_0\}$. Considere X o exemplo do pente com o ponto $(0,0)$. Considere $x_0 = (0,1)$ e suponha que existe $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H(\cdot,0) = id_X, H(\cdot,1) = x_0$ de forma que $H(x_0,t) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$.
   (a) Note que $id_X \simeq x_0$
   (b) Considere $V = [0,1] \times]\frac{1}{2},1] \cap X$. Note que $(0,1) \in V$. Mostre que existem $\varepsilon > 0$ e $A \subset V$ tais que $H[A \times]1-\varepsilon,1]] \subset V$.
   (c) Mostre que, para cada $n > 0$ tal que $\left(\frac{1}{n},1\right) \in A$, existe $t_n \in [0,1-\varepsilon]$ tal que $H\left(\left(\frac{1}{n},1\right),t_n\right) \notin A$.
   (d) Considere todos os t_n 's dado pelo item anterior. Mostre que existem uma subsequência $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $t_0 \in [0,1-\varepsilon]$ tais que $t_{n_k} \to t_0$.
   (e) Obtenha uma contradição a partir de $\left(\left(\frac{1}{n_k},1\right),t_{n_k}\right) \to ((0,1),t_0)$

A ideia aqui é dar uma maneira de caracterizar quais "laços" num espaço podem ser deformados de um para o outro.

Definição 27

Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Chamamos de laço no ponto x_0 uma função $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = f(1) = x_0$.

Definição 28

Sejam $f, g : [0,1] \to X$ laços no ponto x_0. Dizemos que f e g são laços homotópicos se f e g são caminhos homotópicos. Usaremos a notação $f \simeq_{x_0} g$, mas podemos omitir o x_0 quando este estiver claro no contexto.

Note que a relação $\simeq_{x_0}$ é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

Denotamos a classe de equivalência de f por $[f]$.

O conjunto de tais classes será denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Note também que podemos "concatenar" (compor) dois laços:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Um aspecto bastante interessante nisso é que podemos dar uma estrutura de grupo para as classes dos laços, tomando como operação a concatenação de seus representantes.

Proposição 29

Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Definimos $* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ por $[f] * [g] = [f * g]$. Tal operação está bem definida.

Demonstração. Basta mostrar que se $f_1 \simeq_{x_0} f_2$ por H_f e $g_1 \simeq_{x_0} g_2$ por H_g, então $(f_1 * g_1) \simeq_{x_0} (f_2 * g_2)$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} H_f(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_g(2s-1, t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Antes de continuarmos, vamos introduzir uma notação auxiliar para as demonstrações dos próximos resultados (a natureza dessa definição é puramente técnica):

Definição 30

Sejam $f : [0,1] \to X$ e $g : [0,1] \to X$ dois laços num ponto $x_0 \in X$. Dado $a \in (0,1)$, denotamos por $f *_a g : [0,1] \to X$ o seguinte laço:

$$(f *_a g)(t) = \begin{cases} f\left(\frac{t}{a}\right) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g\left(\frac{t-a}{1-a}\right) & \text{se } a < t \leq 1 \end{cases}$$

Note que, assim, $f * g = f *_{\frac{1}{2}} g$.

Lema 31

Sejam $f : [0,1] \to X$ e $g : [0,1] \to X$ dois laços no ponto x_0. Sejam $a, b \in (0,1)$. Então $f *_a g \simeq_{x_0} f *_b g$.

Demonstração. Note que é suficiente mostrarmos que $f * g \simeq f *_a g$ para todo $a \in (0,1)$. Dado $t \in [0,1]$, defina

$$H_t = f *_{\left(at + (1-t)\frac{1}{2}\right)} g$$

Note que $H_t : [0,1] \to X$. Definindo $H(s,t) = H_t(s)$ temos a homotopia desejada (para ver que é contínua, basta escrevê-la explicitamente).

Proposição 32

Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Então $(\pi_1(X, x_0), *)$, é um grupo.

Demonstração. Associatividade: Note que $f * (g * h) \neq (f * g) * h$, pois no primeiro caso, f ocupa "metade do tempo", já no segundo caso, ocupa " $\frac{1}{4}$ do tempo". Estendendo a ideia anterior, podemos definir $f *_a g *_b h$ de forma que no intervalo $[0, a)$ se percorra o caminho indicado por f, em $[a, b)$ se percorra o caminho indicado por g e, finalmente, no intervalo $[b, 1]$ se percorra o caminho indicado por h. De maneira análoga ao feito anteriormente, pode-se notar que, dados $0 < a < b < 1$ e $0 < \alpha < \beta < 1$, $f *_a g *_b h \simeq_{x_0} f *_\alpha g *_\beta h$. Basta tomar $H(x, t) = (f_{at+(1-t)\alpha} * g_{bt+(1-t)\beta} * h)(x)$.
Assim, só precisamos notar que $f * (g * h) = f *_{\frac{1}{2}} g *_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} h$ e que $(f * g) * h = f *_{\frac{1}{4}} g *_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} h$.

Elemento neutro: Considere e o laço constante igual a x_0. Vamos mostrar que $[e]$ é o elemento neutro. Para tanto, basta mostrar que $f * e \simeq_{x_0} f \simeq_{x_0} e * f$.

De fato, para o primeiro caso, fazemos ($H(x,t) = (f *_{t+(1-t)\frac{1}{2}} e)(x)$)

$$H(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2x}{1+t}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1+t}{2} \\ x_0, & \text{se } \frac{1+t}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Elemento inverso: Dado f laço em x_0, seja f^-dado por $f^-(x) = f(1-x)$. Definimos $[f]^- = [f^-]$. Se mostrarmos que $f * f^- \simeq_{x_0} e \simeq_{x_0} f^- * f$, seguirá que $[f]^-$está bem definido. Para o primeiro caso, fazemos ($H(x,t) = (f *_{t+(1-t)\frac{1}{2}} f^-)((1-t)x+t)$)

$$H(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2[(1-t)x+t]}{t+1}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f^-(2x-1), & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aula 24 terminou aqui