

Álgebra Linear e Aplicações

- *Inversa de matrizes usando cofatores.*
 - *Regra de Cramer.*
 - *Condições para existir decomposição LU.*
- 
- A decorative graphic element consisting of a series of parallel lines. On the left side, there are several horizontal lines. These lines transition into a series of diagonal lines that slope upwards from left to right, filling the right half of the page.

COMENTÁRIO SOBRE EXPANSÃO POR COFATORES

DADO $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, VIMOS QUE $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A(i,j))$, $j \in \{1, \dots, n\}$

COMO O DETERMINANTE É ÚNICO, PODEMOS ESCOLHER V_j .

COMO $\det(A^T) = \det(A)$, TEMOS

$$\det(A) = \det(A^T) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij}^T \det(A^T(i,j)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ji} \det(A(j,i)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ji} \det(A(j,i))$$

CONCLUSÃO	$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A(i,j))$	EXPANSÃO NA COLUNA j
	$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ji} \det(A(j,i))$	EXPANSÃO NA LINHA i

APLICAÇÃO 1: INVERSA USANDO COFATORES

DEFINIÇÃO: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. O COFATOR C_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, DE A É DEFINIDO COMO $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i,j))$. A MATRIZ DE COFATORES $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É A MATRIZ CUJAS ENTRADAS SÃO OS COFATORES DE A .

<u>EXEMPLO</u> $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 6$	$C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 14$
	$C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$	$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 9$
$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3$	$C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = 10$	$C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = -6$
$C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = 18$		$C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -18$

Assim, $C = \begin{bmatrix} -3 & 18 & 6 \\ 1 & 10 & 14 \\ 9 & -6 & -18 \end{bmatrix}$

TEOREMA: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ E $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ A MATRIZ DOS COFATORES DE A .
 LOGO $AC^T = \det(A)I$.

DEMO: $(AC^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} C_{kj}^T = \sum_{k=1}^n A_{ik} C_{jk} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{ik} \det(A_{j|k})$.

SE $i=j$, ENTÃO $(AC^T)_{ii} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{ik} \det(A_{j|k}) = \det(A)$ (EXPANSÃO NA LINHA i)

SE $i \neq j$, ENTÃO $(AC^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{ik} \det(A_{j|k}) = \det(A_{\substack{1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{LINHA } i \quad \text{LINHA } j}}) = 0$

PORTANTO, $(AC^T)_{ij} = \det(A) \delta_{ij} \Rightarrow AC^T = \det(A)I$

COROLÁRIO: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL. LOGO $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE $A(\frac{1}{\det(A)} C^T) = I$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ É TAL QUE $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-6) - 12 = 36 - 12 + 6 = 30$

LOGO $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 18 & 10 & -6 \\ 6 & 14 & -18 \end{bmatrix}$

APLICAÇÃO 2: REGRA DE CRAMER

SEJAM $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL E $b \in \mathbb{R}^n$. CONSIDERE O SISTEMA $Ax = b$. SEJA $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ A MATRIZ DE COFATORES DE A . LOGO $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$.

PORTANTO,

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{1}{\det(A)} C^T b.$$

NOTE QUE

$$(C^T b)_j = \sum_{i=1}^n C_{ji}^T b_i = \sum_{i=1}^n C_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \underline{b_i} \det(A(i, i_j))$$

LEMBRAMOS QUE

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \underline{A_{ij}} \det(A(i, j))$$

LOGO

$$(C^T b)_j = \det \left(\begin{bmatrix} \overset{\text{COLUMNA 1 DE A}}{\uparrow} \overset{\text{COLUMNA 2 DE A}}{\uparrow} \dots \overset{\text{COLUMNA j DE A}}{\uparrow} \underline{b} \dots \overset{\text{COLUMNA n DE A}}{\uparrow} \end{bmatrix} \right) = \det(B_j)$$

↳ MATRIZ A COM b NO LUGAR DA COLUMNA j

$$\text{COMO } x = \frac{1}{\det(A)} C^T b, \text{ TEMOS } x_j = \frac{1}{\det(A)} (C^T b)_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}$$

ACABAMOS DE PROVAR O SEGUINTE TEOREMA:

TEOREMA: SEJAM $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL E $b \in \mathbb{R}^n$. A SOLUÇÃO $x \in \mathbb{R}^n$ DE $Ax = b$ É DADA POR

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}, \text{ EM QUE } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{MATRIZ A SUBSTITUINDO A COLUMNA } j \text{ PELO VETOR } b$$

OBSERVAÇÃO: NUMERICAMENTE, O MÉTODO DE CRAMER É INEFICIENTE. (NÃO É BOM PARA CÁLCULOS, POIS EXIGE MUITAS OPERAÇÕES)

EXEMPLO: RESOLVA O SEGUINTE SISTEMA USANDO REGRA DE CRAMER:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - 6y - z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ E $b = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = -12 - 3 + 8 + 18 + 4 - 4 = 11$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-12 + 4) = -88 \Rightarrow x = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = -8$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 \cdot (-3 - 4) = -77 \Rightarrow y = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = -7$$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 11 = 11 \cdot (8 + 18) = 11 \cdot 26 \Rightarrow z = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = 26$$

A SOLUÇÃO É $(x, y, z) = (-8, -7, 26)$

APLICAÇÃO 3: CONDIÇÃO SUFICIENTE E NECESSÁRIA PARA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL TER DECOMPOSIÇÃO LU, OU SEJA,
 $A = LU$ (EQUIVALE A PODER ESCALONAR A SEM PRECISAR TROCAR LINHAS DE A)

DADO $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ DEFINIDO POR $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, DEFINIMOS $A_k \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ POR $A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$

TEOREMA: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ INVERSÍVEL. LOGO $A = LU \Leftrightarrow \det(A_k) \neq 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$

DEMO: ($\Rightarrow$) SEJAM $L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$. LOGO $A = LU$.

ESCREVEMOS $L_k = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $U_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{kk} \end{bmatrix}$. LOGO $L = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ & A \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} U_k & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$.

PORTANTO $A = LU = \begin{bmatrix} L_k U_k & L_k C \\ A U_k & AC + BD \end{bmatrix} \Rightarrow A_k = L_k U_k$.

CONCLUÍMOS $\det(A_k) = \det(L_k) \det(U_k) = u_{11} \dots u_{kk} \neq 0$, POIS $u_{11} \dots u_{nn} = \det(A) \neq 0$.

($\Leftarrow$) FAZEMOS INDUÇÃO EM n

$n=2$ SEJA $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ COM $a \neq 0$ E $ad - bc \neq 0$

LOGO $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}}_{:=L} \underbrace{\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & \eta \end{bmatrix}}_{:=U} = \begin{bmatrix} u & v \\ mu & mu + \eta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} u = a, v = b \\ m = \frac{c}{a}, \eta = d - \frac{c}{a}b \end{array} \right\} A = LU$

SE VALE PARA n , VALE PARA $n+1$

SEJA $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ TAL QUE $\det(A_k) \neq 0, \forall k \in \{1, \dots, n+1\}$. PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, $A_n = L_n U_n$.

ASSIM, SE $L = \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ m^T & 1 \end{bmatrix}$ E $U = \begin{bmatrix} U_n & v \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$, $m, v \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}$, ENTÃO

$LU = \begin{bmatrix} L_n U_n & L_n v \\ m^T U_n & m^T v + \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & A_{1:n,n+1} \\ A_{n+1,1:n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} = A$. LOGO $v = L_n^{-1} A_{1:n,n+1}$
 $m^T = A_{n+1,1:n} U_n^{-1}$
 $\eta = a_{n+1,n+1} - A_{n+1,1:n} U_n^{-1} L_n^{-1} A_{1:n,n+1}$ } $A = LU$

EXEMPLO: JÁ VIMOS QUE $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ TEM DECOMPOSIÇÃO LU.

ISTO PODE SER CONFIRMADO NOVAMENTE OBSERVANDO QUE $\det(A_k) \neq 0, \forall k \in \{1, \dots, 4\}$

$$\det(A_1) = \det([2]) = 2 \neq 0$$

$$\det(A_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 0$$

$$\det(A_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}\right) = 4 \neq 0$$

$$\det(A_4) = \det(A) = 8 \neq 0$$

$$\det(A_k) \neq 0, \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$