Segunda Prova de MAP 3210 - 2023
BMA & BMAC - IME USP, aos 19 de junho de 2023

Questão 1 Considere duas funções, f e g, de classe $\mathcal{C}^1$ definidas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, y) \\ \dot{y} = g(t, x) \end{cases} \tag{1}$$

Tome $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, e o problema de valor inicial dado pela equação (1) sujeita às condições iniciais $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$.

Suponha que, para um certo $T > 0$, a solução não prolongável desse problema $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ define-se em $[t_0, t_0{+}T]$ e considere o seguinte método numérico para encontrar aproximações de $\varphi(t_0 + T)$.

1. Para $n \in \mathbb{N}$ tome $h_n = \frac{T}{n}$ e, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, considere $t_k = t_{k-1} + h_n = t_0 + k\frac{T}{n}$.
2. Para $k \in \{1, \ldots, n\}$, faça $y_k = y_{k-1} + h_n g(t_{k-1}, x_{k-1})$ e depois faça $x_k = x_{k-1} + h_n f(t_{k-1}, y_k)$.
3. A aproximação de $\varphi(t_0 + T)$ na etapa n será $\varphi_n = (x_n, y_n)$.

Chame esse método de mérodo de Euler semi-implícito.

(i) (0,5) Aplique o método de Euler semi-implícito para a equação $\ddot{x} = -x$ com condições iniciais $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2$ e encontre a aproximação de $x(6,28)$ obtida para $n = 5$ e $n = 10$.

(ii) (0,5) Aplique o método de Euler explícito para o problema de condição inicial do item anterior com os mesmos valores de n e obtenha as aproximações correspondentes.

(iii) (0,5) Refaça o item anterior agora com o método de Euler implícito.

(iv) (0,5) Coloque em um gráfico os valores encontrados para $x_k,\ 0 \leq k \leq n$ nos itens anteriores e compare o gráfico da solução exata do problema proposto ($x(t) = \cos t + 2 \sin t$).

(v) (2.0) Refaça os itens (i) e (ii) agora para a equação $\ddot{x} = -\sin x$, com as condições iniciais $x(0) = 0,2,\ \dot{x}(0) = -0,1$ (use uma calculadora ou um computador para obter os valores necessários da função seno).

Questão 2 (1,5) Considere reais estritamente positivos $\alpha,\ \beta,\ \delta$ e γ e, no aberto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$ a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y \end{cases} \tag{2}$$

(i) Encontre os pontos de equilíbrio de (2) em Ω.

(ii) Mostre que $V(x,y) = \delta x - \gamma \log(x) - \alpha \log(y) + \beta y,\ (x,y) \in \Omega$, é uma integral primeira de (2).

(iii) Esboce o retrato de fase de (2) (justifique seus "rabiscos").

Questão 3 (2,0) Esboce o retrato de fase, justificando os "rabiscos"feitos, de

(i) $\ddot{x} = -x(x-1)(x+2),\ x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\ddot{x} = x^5 - 3x^4 + 2x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

Questão 4 Seja $W : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ e a equação

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial W}{\partial x}(x,y) \\ \\ \dot{y} = -\frac{\partial W}{\partial y}(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

(i) (0,25) Mostre que os pontos de equilíbrio de (3) são os pontos críticos de W.

(ii) (1,75) Prove que a equação (3) não tem soluções periódicas que não sejam constantes.

(iii) (1.5) Suponha que $(0,0)$ é um ponto de mínimo local estrito de W (i.e. existe $r > 0$ tal que, se $0 < \|(x,y)\| < r$ então $W(x,y) > W(0,0)$) e mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se $\|(x_0,y_0)\| < \delta$ então $\varphi(t)$, a solução não prolongável de (3) com condições iniciais $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$, define-se em $[0, +\infty[$ e $\|\varphi(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t > 0$.