UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Teoria

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

Objetivos

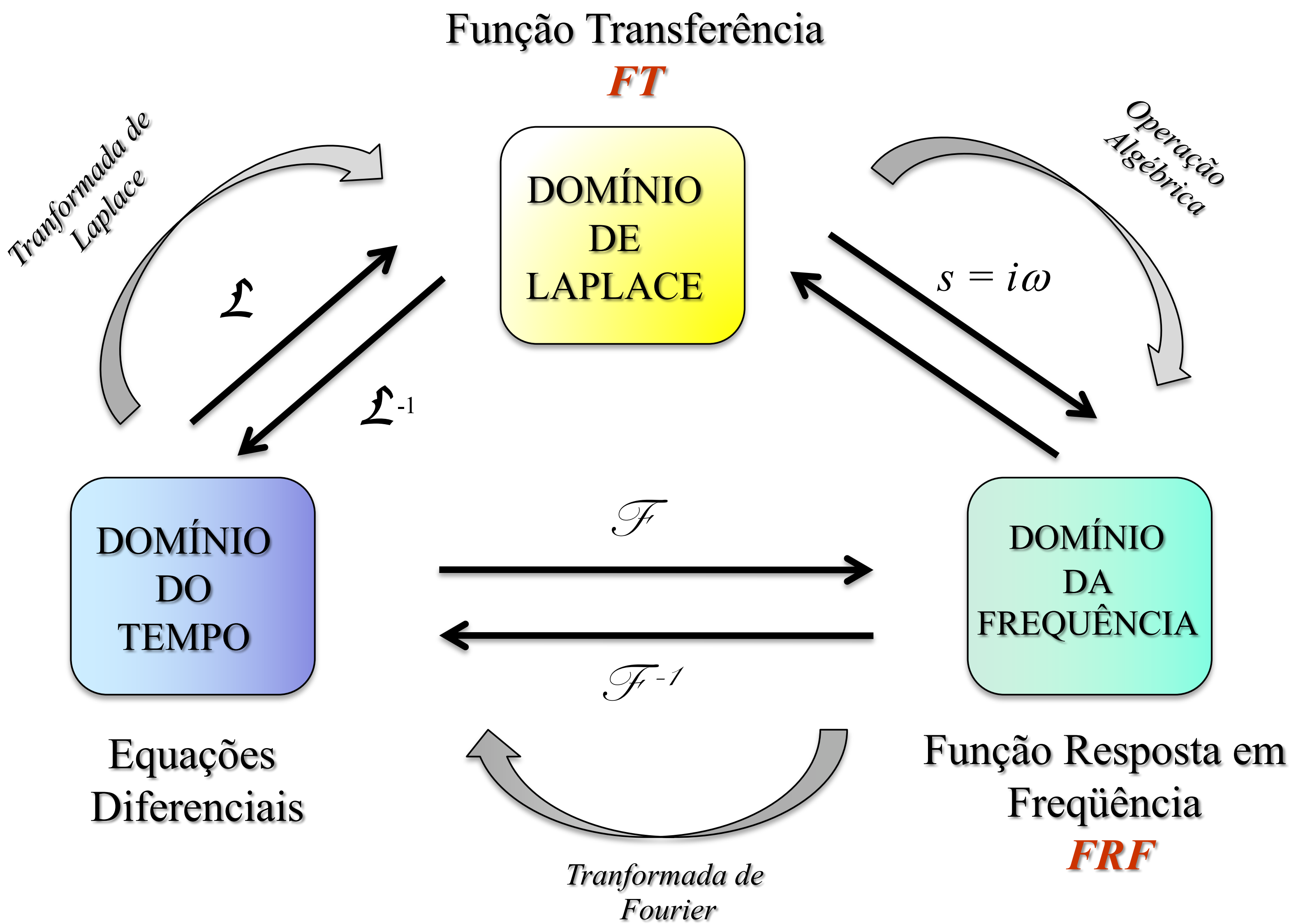
Objetivo da presente aula é discutir a resposta no domínio do tempo para sistemas dinâmicos lineares. Embora a teoria possa ser aplicada a um sistema de qualquer ordem, estaremos concentrando esforços no estudo da resposta *sistemas de primeira e segunda ordem*, no *domínio do tempo* a entradas padrão e *no domínio da frequência* para o estudo da *resposta em frequência* de sistemas dinâmicos

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

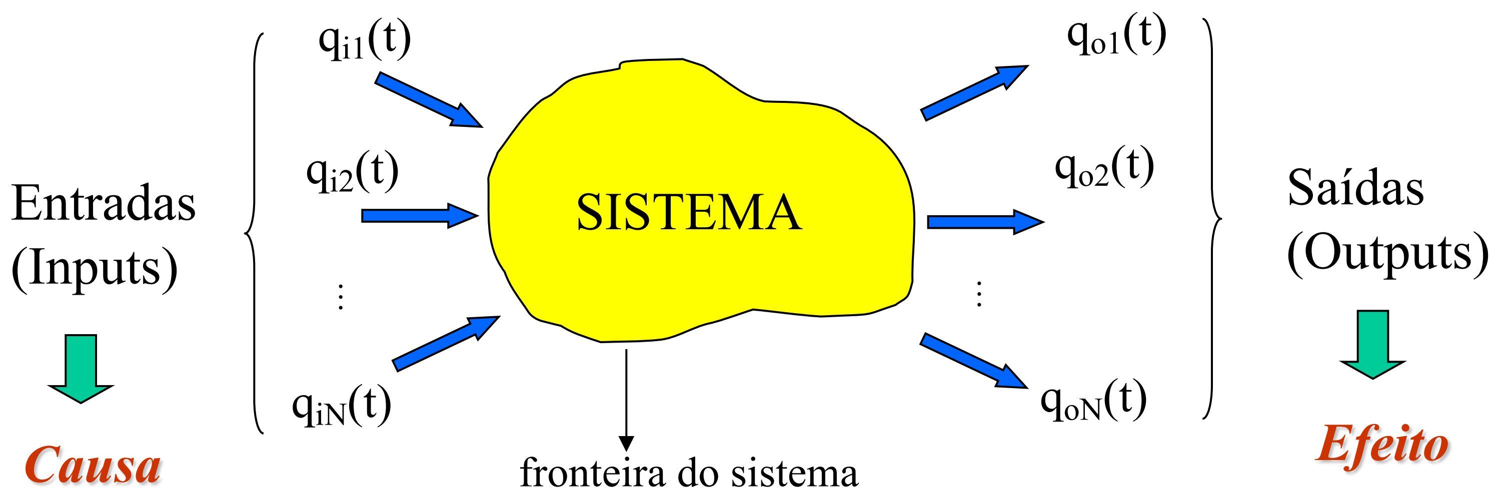
2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Interação entre Domínios



Recordar é Viver !

A figura abaixo mostra uma representação muito importante:



- Entradas: Agentes que provocam distúrbios no sistema. Geralmente, não dependem do sistema
- Saídas: Respostas do sistema. São na verdade "entradas" modificadas pelas características dinâmicas do sistema.

Considerações Preliminares

Forma geral de um sistema dinâmico linear de parâmetros concentrados:

Entrada $q_i(t)$ $\longrightarrow$ SISTEMA H(s), h(t) $\longrightarrow$ Saída $q_o(t)$

No domínio do tempo a EDO do sistema é escrita como:

SISTEMA ($q_o\,(t)$ saída)

$$\boxed{a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =}$$

$$\boxed{b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + \cdots + b_0 q_i}$$

ENTRADA ($q_i\,(t)$)

Cont. ...

De forma abreviada, podemos escrever esta última equação como segue

$$\sum_{p=0}^{N} a_p \frac{d^p q_o}{dt^p} = \sum_{q=0}^{M} b_q \frac{d^q q_i}{dt^q}$$

e, usando a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{p=0}^{N} a_p \frac{d^p q_o}{dt^p}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{q=0}^{M} b_q \frac{d^q q_i}{dt^q}\right\}$$

e, usando a propriedade

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) - \cdots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

Cont. ...

Aplicando a propridade da derivação a EDO transforma-se numa equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

onde $Q_i(s)$ e $Q_o(s)$ representam as transformadas de Laplace de $q_i(t)$ e $q_o(t)$, respectivamente. Os polinômios D(s) e N(s) possuem a seguinte forma

$$D(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N = \sum_{p=0}^{N} a_p s^p$$

$$N(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_M s^M = \sum_{q=0}^{M} b_q s^q$$

Enquanto que $R_o(s)$ e $R_i(s)$ também são polinômios em s, possuindo graus máximos iguais a (N-1) e (M-1), respectivamente e que dependem dos coeficientes a_p e b_p bem como das condições iniciais das variáveis de entrada e saída.

Cont. ...

E a partir da equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

Obtemos a solução da EDO no domínio de Laplace, escrevendo

$$Q_o(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s)}_{\text{Devida à Entrada}} + \underbrace{\left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)}\right)}_{\text{Devida às C.I.}}$$

E, a resposta do sistema no domínio do tempo é obtida pela T.L. inversa

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)}\right)\right\}$$

Cont. ...

Vamos fazer uma reflexão sobre as últimas expressões. Retornando à solução em s

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) + \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right)$$

Esta é a solução geral, que leva em conta a entrada ($Q_i(s)$) e as condições iniciais ($R_i(s)$ e $R_o(s)$). Para o caso mais geral, conforme já mostrado a solução em t fica

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right) \right\}$$

Agora vamos considerar dois casos separadamente. Inicialmente, consideremos que a entrada $q_i(t)$ é nula. Neste caso as equações acima são escritas como

$$Q_o(s) = \frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} = \frac{R_i(s)}{D(s)} - \frac{R_o(s)}{D(s)}$$

Resposta de Regime Transiente (Transitória)

$$q_{ot}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{R_i(s)}{D(s)} \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{R_o(s)}{D(s)} \right\}$$

Devida somente às C.I.

Cont. ...

Se as condições iniciais forem nulas então temos

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s)$$

E a partir desta podemos definir (confirmar !) o conceito de F.T.

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\displaystyle\sum_{q=0}^{M} b_q s^q}{\displaystyle\sum_{p=0}^{N} a_p s^p}$$

E, neste caso a resposta do sistema no domínio do tempo fica

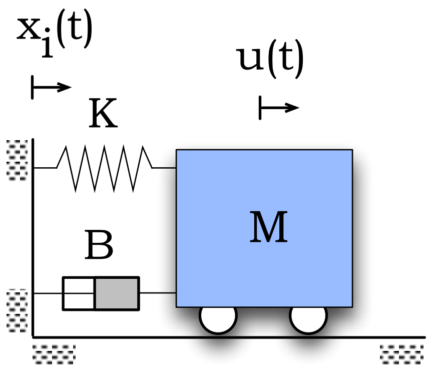
Resposta de Regime Permanente

$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\}$$

Devida somente à $q_i(t)$

Cont. ...

Exemplo: Sistema massa mola com entrada deslocamento via base



A equação de movimento é dada por:

$$M\frac{d^2u_o}{dt^2} + B\frac{du_o}{dt} + Ku_o = B\frac{dx_i}{dt} + Kx_i$$

Agora transformamos a EDO por Laplace

$$\mathcal{L}\left\{M\frac{d^2u_o}{dt^2} + B\frac{du_o}{dt} + Ku_o\right\} = \mathcal{L}\left\{B\frac{dx_i}{dt} + Kx_i\right\}$$

Resultando em

$$\left(Ms^2 + Bs + K\right)U_o(s) - (Ms + B)\,u_o(0) - M\dot{u}_o(0) = (Bs + K)X_i(s) - Bx_i(0)$$

Então

$$D(s) = Ms^2 + Bs + K$$
$$R_o(s) = -(Ms + B)\,u_o(0) - M\dot{u}_o(0)$$
$$N(s) = Bs + K$$
$$R_i(s) = -Bx_i(0)s$$

Cont. ...

$$U_o(s) = \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K}}}^{H(s)} X_i(s)}_{\textit{Regime Permanente}} - \underbrace{\frac{Bx_i(0)}{Ms^2+Bs+K} + \frac{[(M+B)u_o(0)]s}{Ms^2+Bs+K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2+Bs+K}}_{\textit{Regime Transiente}}$$

Inexistência de condições iniciais na entrada $x_i(t)$

$$U_o(s) = \frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K}X_i(s) + \frac{[(M+B)u_o(0)]s}{Ms^2+Bs+K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2+Bs+K}$$

Inexistência de condições iniciais na saída $u_o(t)$ a resposta de regime permanente é

$$U_o(s) = \frac{Bs+K}{Ms^2+Bs+K}X_i(s) \quad \Rightarrow \quad U_o(s) = H(s)X_i(s)$$

Cont. ...

E, para o caso da inexistência da entrada ($x_i(t) = 0$) o sistema responde somente às condições iniciais e a expressão da resposta fica então

$$U_{ot}(s) = [(M+B)u_o(0)]\left(\frac{s}{Ms^2+Bs+K}\right) + M\dot{u}_o(0)\left(\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right)$$

E, para todos os casos, a correspondente resposta no domínio do tempo é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da respectiva expressão. Por exemplo, para o caso da resposta de regime transiente

$$u_{ot}(s) = \mathcal{L}^{-1}\{U_{ot}(s)\} = [(M+B)u_o(0)]\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{Ms^2+Bs+K}\right\} + M\dot{u}_o(0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right\}$$

s_1 e s_2 : raízes de $Ms^2 + Bs + K$ $\longrightarrow$

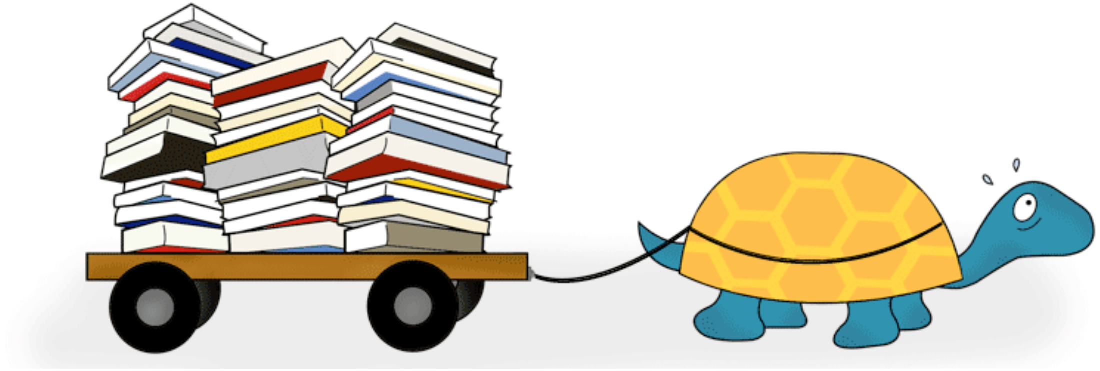
$$\frac{s_2 e^{-s_2 t} - s_1 e^{-s_1 t}}{s_2 - s_1} \qquad \frac{e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}$$

E, para a resposta de regime permanente:

$$u_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X_i(s)\}$$ que depende de $x_i(t)$

FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Sistemas de Primeira Ordem

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral :

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \boxed{a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =}$$
$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + \cdots + \boxed{b_0 q_i}$$

E, de forma mais simplificada:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_o q_i$$

Na forma padrão:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_o}{a_0} q_i$$

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

De forma compacta esta última equação pode ser escrita como:

$$\mathcal{T}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K}q_i$$

Onde

$$\mathcal{T} = \frac{a_1}{a_0}$$ ⇨ ***CONSTANTE DE TEMPO*** [s]

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0}$$ ⇨ ***GANHO DE REGIME PERMANENTE*** $[q_o]/[q_i]$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da EDO temos:

$$\mathcal{T}\left(sQ_o(s) - q_o(0)\right) + Q_o(s) = \mathbb{K}Q_i(s)$$

Então, a solução em Laplace escreve

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s+1} + \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s+1}$$

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

E, para o caso de $q_o(0) = 0$ temos para a resposta de regime permanente

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s+1}$$

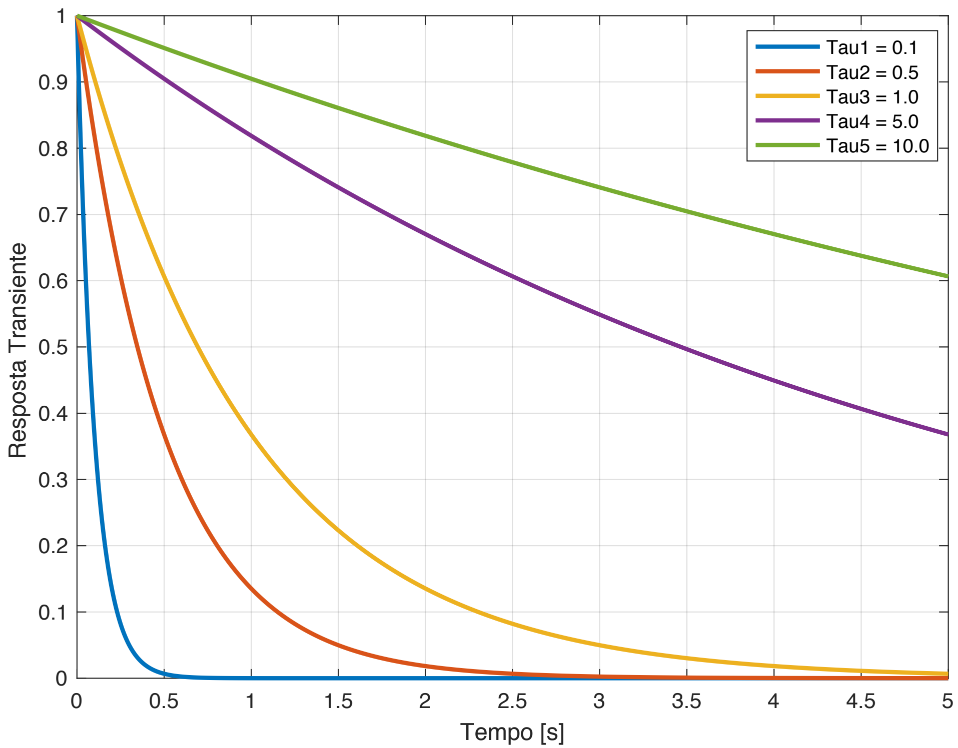
Da qual obtemos a F.T. para um sistema de primeira ordem na forma padrão

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\mathcal{T}s+1}$$

De forma análoga, se $q_i(t) = 0$ temos a resposta de regime transiente dada por

$$Q_{ot}(s) = \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s+1} = \frac{q_o(0)}{s+\frac{1}{\mathcal{T}}} \quad \Rightarrow \quad q_{ot}(t) = q_o(0)e^{-\frac{1}{\mathcal{T}}t}$$

Gráfico da Resposta



A resposta de regime permanente em t é obtida de:

$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\}$$

Cont. ...

E a resposta total é a soma das duas parcelas

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)Q_i(s)\right\} + q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

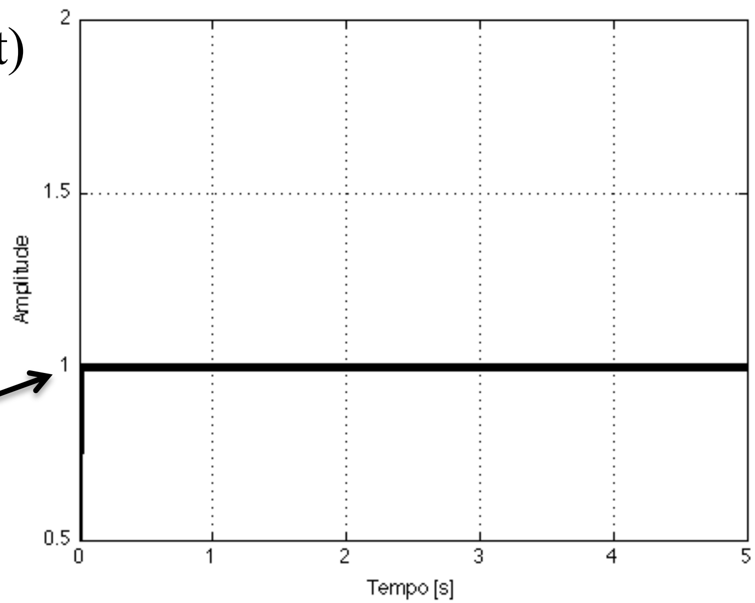
Como mostrado, a resposta total $q_o(t)$ depende da natureza da entrada $q_i(t)$ e, consequentemente de sua transformada de Laplace $Q_i(s)$. Veremos em seguida vários exemplos de entradas sendo as mais importantes:

- O degrau
- A rampa
- O impulso
- Com atraso no tempo
- Combinadas
- Harmônica

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM - EXEMPLOS

Vamos obter a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada *degrau unitário* mostrada abaixo

$q_i(t)$



$q_{is} = 1$

Analiticamente a entrada degrau unitário pode ser expressa como:

$$q_i(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Obs: a notação u(t) ou μ(t) são amplamente usadas para representar funções degrau !

Cont. ...

Uma entrada degrau com amplitude genérica qis é escrita como: $q_i(t) = q_{is}u(t)$

A Transformada de Laplace da entrada é dada por: $Q_i(s) = q_{is}\mathcal{L}\{u(t)\} = \dfrac{q_{is}}{s}$

Sabemos que a solução geral é dada por: $Q_o(s) = \dfrac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s+1} + \dfrac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s+1}$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{is}}{\mathcal{T}}\left(\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\mathcal{T}}\right)}\right) + \frac{q_o(0)}{s+\frac{1}{\mathcal{T}}}$$

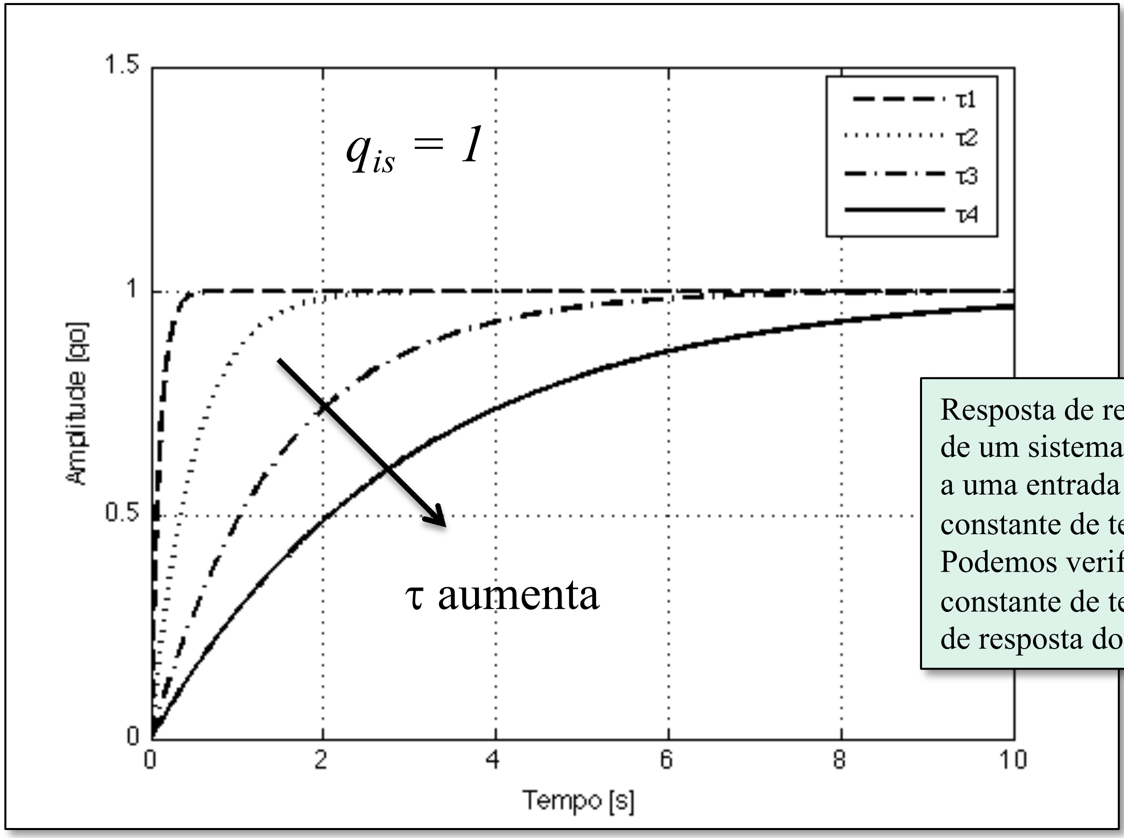
E a solução no domínio do tempo é obtida pela Transformada Inversa de Laplace

$$q_o(t) = \mathbb{K}q_{is}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) + q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Cont. ...

E, para $q_o(0) = 0$

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$



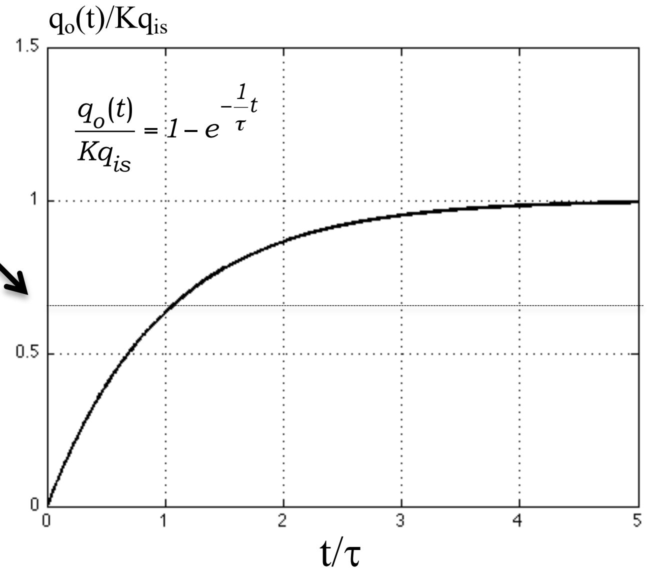
Resposta de regime permanente de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau unitário e constante de tempo variável ! Podemos verificar a influência da constante de tempo τ na velocidade de resposta do sistema !

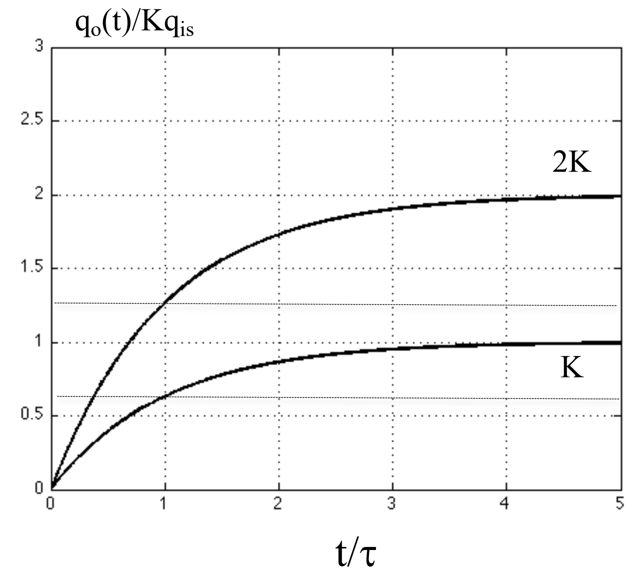
Cont. ...

Conclusão 1: A constante de tempo τ interfere diretamente na velocidade de resposta do sistema de primeira ordem e de forma inversamente proporcional. Quanto menor a constante de tempo maior é a velocidade de resposta do sistema pois o mesmo atinge a resposta de regime permanente num intervalo de tempo menor (e vice versa)

Façamos agora uma análise admensional da resposta de regime ao degrau unitário:

t/τ	$q_o(t)/Kq_{is}$
0	0
1	0,632
2	0,865
3	0,950
4	0.982
∞	1.000

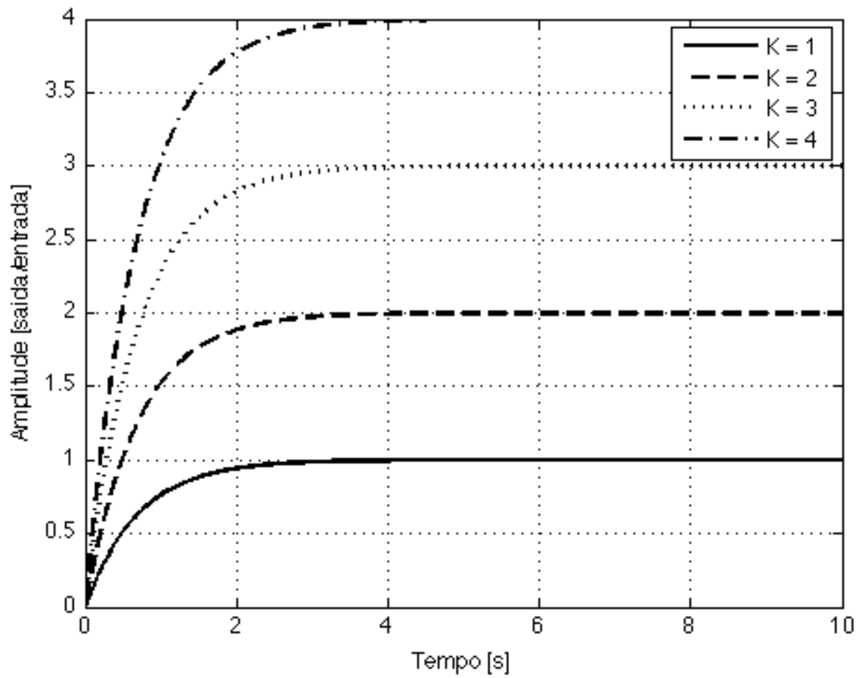




Cont. ...

Definição: A constante de tempo de um sistema de primeira ordem τ representa o intervalo de tempo necessário para que o sistema atinja *63,2 %* da resposta de regime permanente para uma entrada degrau unitário na origem dos tempos e com condições iniciais nulas.

Já o grafico abaixo mostra a influência do ganho de regime K na resposta de regime permanente do sistema:



Cont. ...

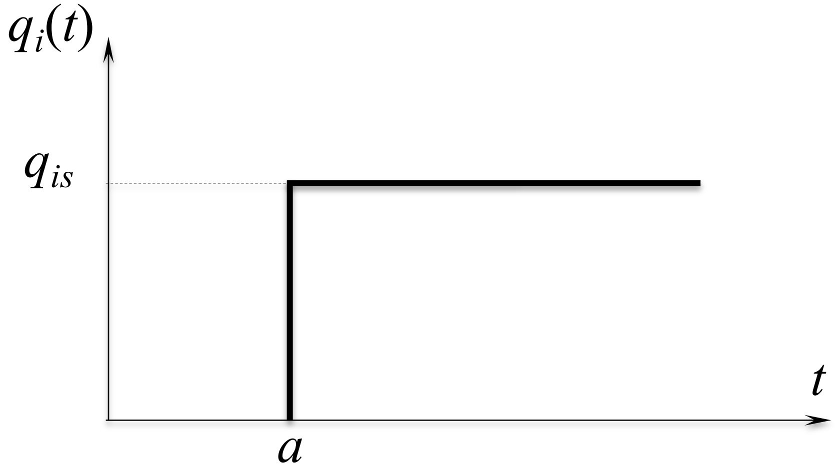
Definição: ***O ganho de regime permanente K*** (ou ***sensibilidade estática***) é definido como a quantidade de saída que se obtém em regime permanente por cada unidade de entrada aplicada ao sistema.

Algébricamente:

$$K = \frac{[q_o(t)]}{[q_i(t)]}$$

Cont. ...

Vejamos agora o caso onde a entrada degrau unitário apresenta um atraso no tempo:



$$q_i(t) = q_{is}u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ q_{is} & t \geq a \end{cases}$$

E para o cálculo da Transformada de Laplace usamos a seguinte propriedade

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\} = F(s)e^{-as} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)$$

Onde F(s) representa a transformada da função não defasada em t !

Cont. ...

Logo para o degrau com atraso temos

$$Q_i(s) = q_{is}\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}$$

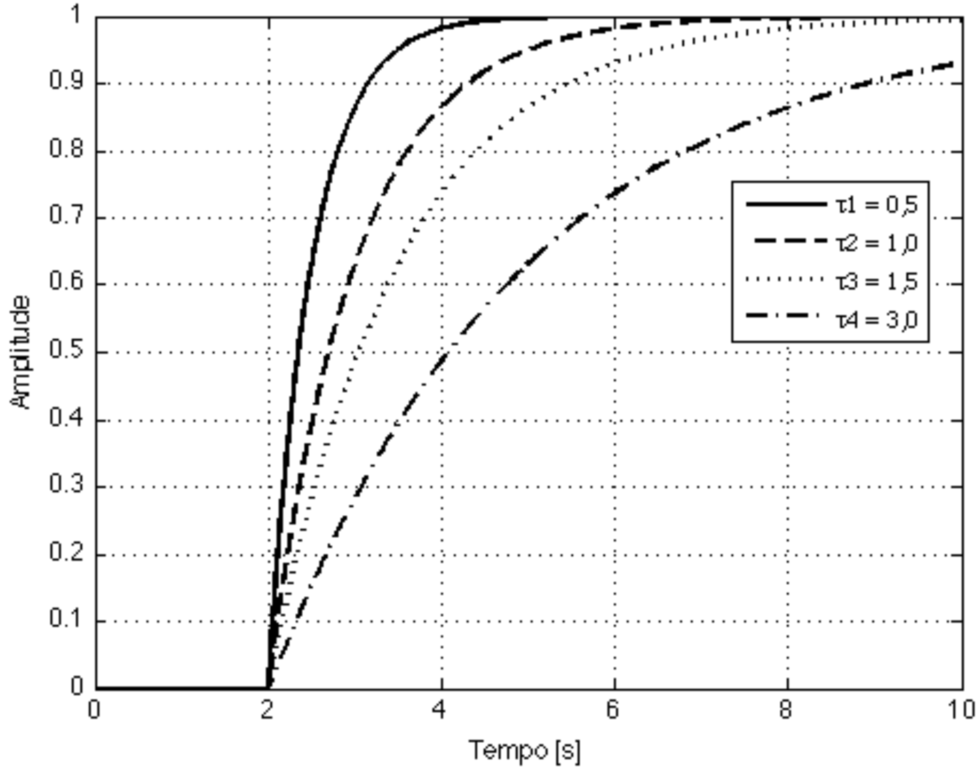
E para determinarmos a *resposta de regime permanente* ($q_o(0) = 0$) usamos

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}Q_i(s)\right\} \Rightarrow q_o(t) = q_{is}\frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}\right\}$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{q_{is}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right)u(t-a)$$

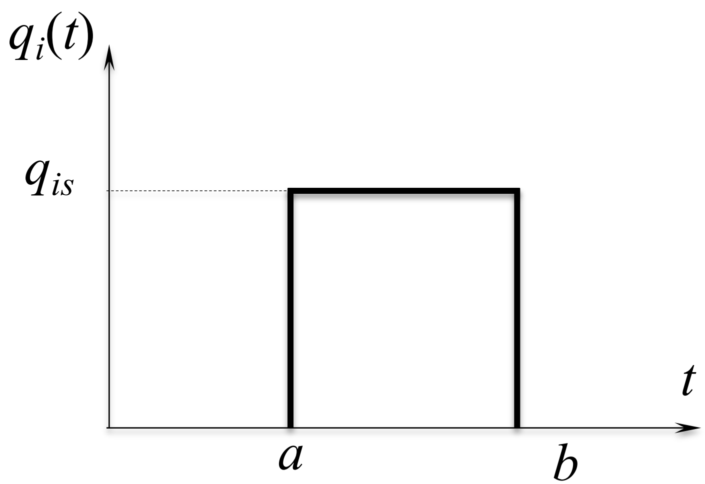
Cont. ...

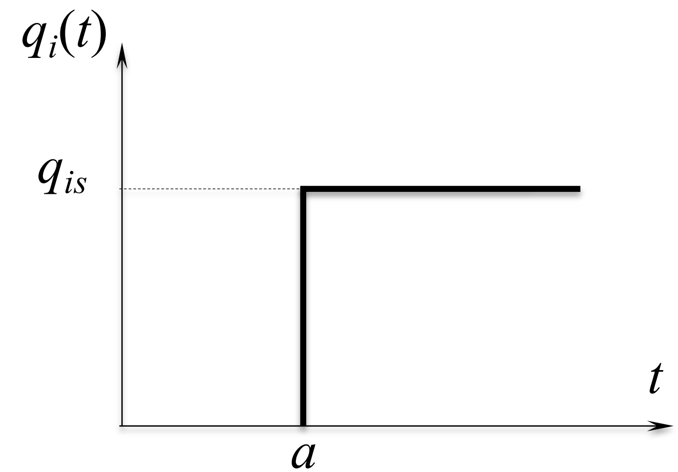
Graficamente:

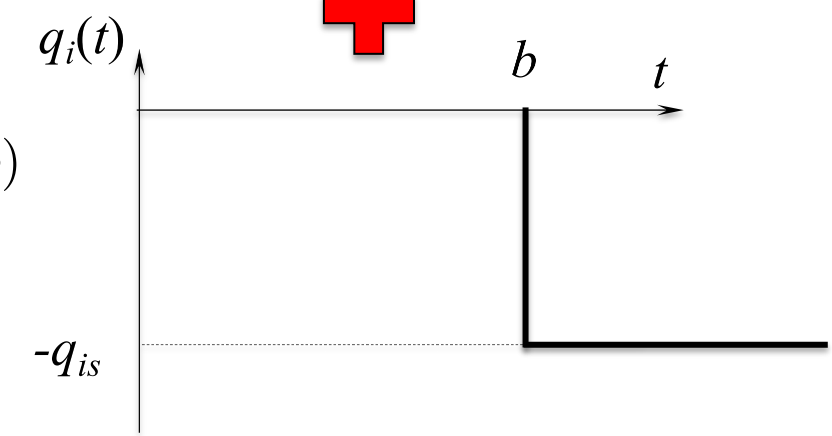


Cont. ...

Vamos agora analisar o seguinte caso







$$q_i(t) = q_{is}u(t-a)u(t-a) - q_{is}u(t-b)u(t-b)$$

ou

$$q_i(t) = q_{is}u(t-a) - q_{is}u(t-b)$$

$$Q_i(s) = q_{is}\frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

Cont. ...

Calculamos agora a resposta de regime permanente do sistema:

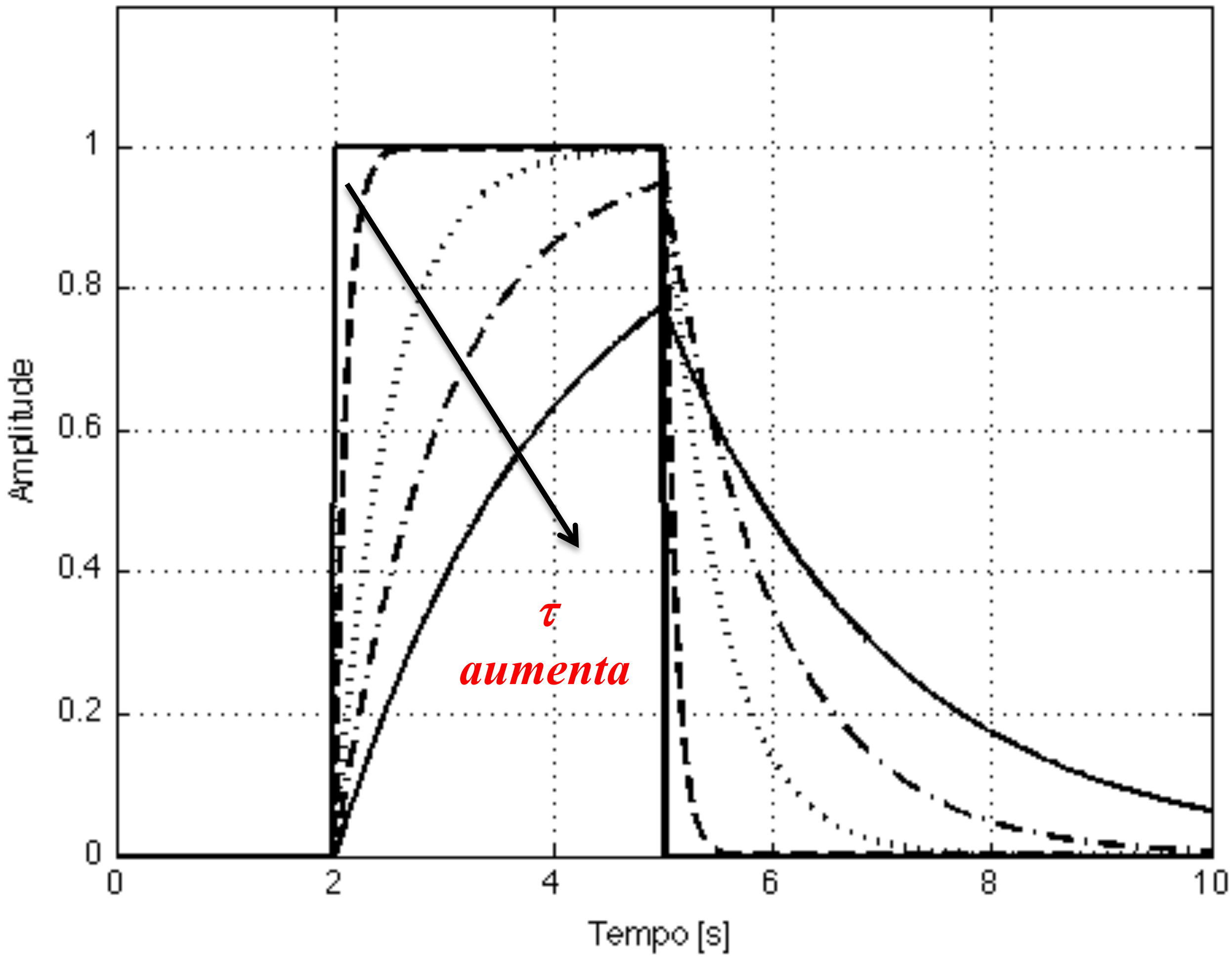
$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}Q_i(s)\right]$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau}q_{is}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}e^{-as} - \frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}e^{-bs}\right]$$

$$\boxed{q_o(t) = \mathbb{K}q_{is}\left[\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right)u(t-a) - \left(1-e^{-\frac{1}{\tau}(t-b)}\right)u(t-b)\right]}$$

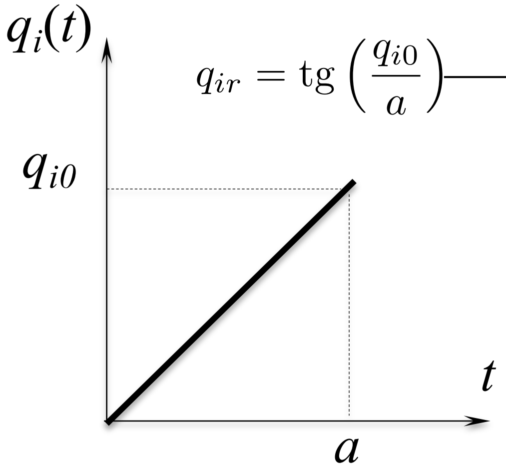
Cont. ...

Graficamente:



Resposta à uma entrada do tipo Rampa

Agora vamos obter a resposta de regime permanente do sistema de primeira ordem à uma entrada do tipo ***rampa.***



rampa unitária: $q_{ir} = 1$

$$q_i(t) = q_{ir}t \quad \Leftrightarrow \quad Q_i(s) = \frac{q_{ir}}{s^2}$$

EDO do sistema:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ir} t$$

Transformando

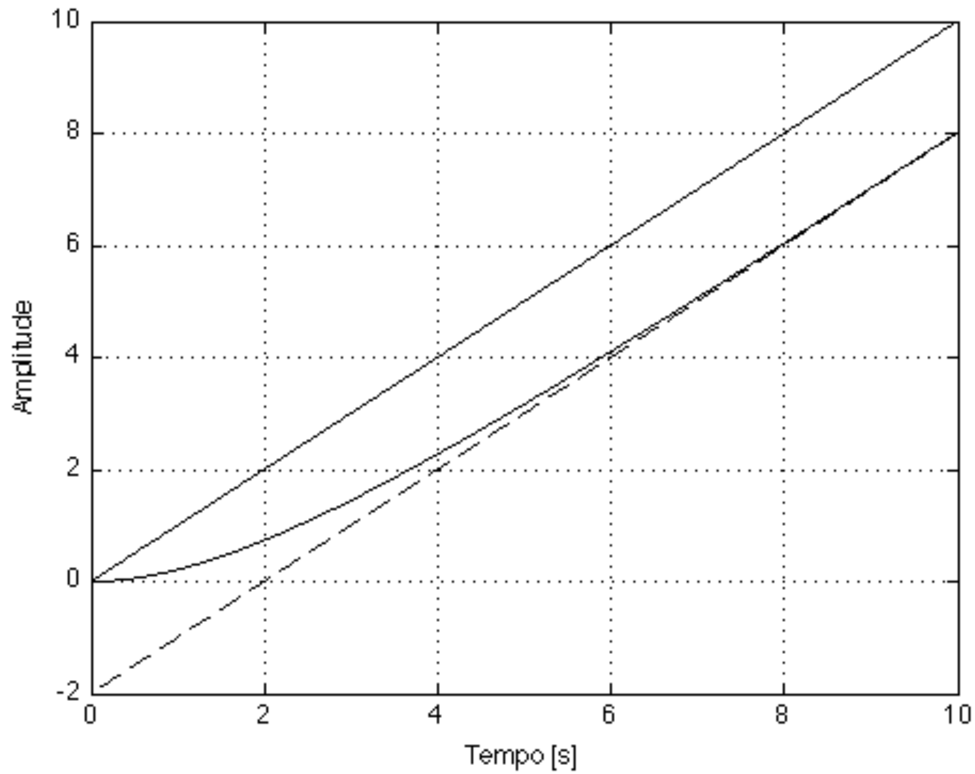
$$\tau\left(sQ_o(s) - q_o(0)\right) + Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{ir}}{s^2}$$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{ir}}{s^2(\tau s + 1)} + \frac{\tau q_o(s)}{\tau s + 1}$$

Cont. ...

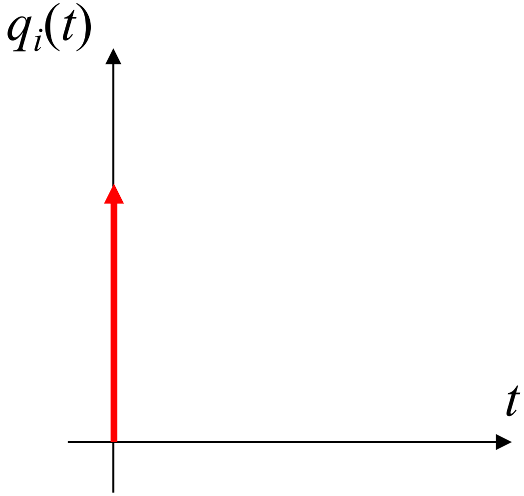
$$q_o(t) = q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t-\tau)$$

$$\boxed{q_o(t) = \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t-\tau)}$$



Resposta à uma entrada Impulso

Impulso Unitário: $A_i = 1$



$$q_i(t) = A_i\delta(t) \Longleftrightarrow Q_i(s) = A_i$$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$

EDO do sistema:

$$\tau\frac{dq_o}{dt} + q_o = A_i\delta(t)$$

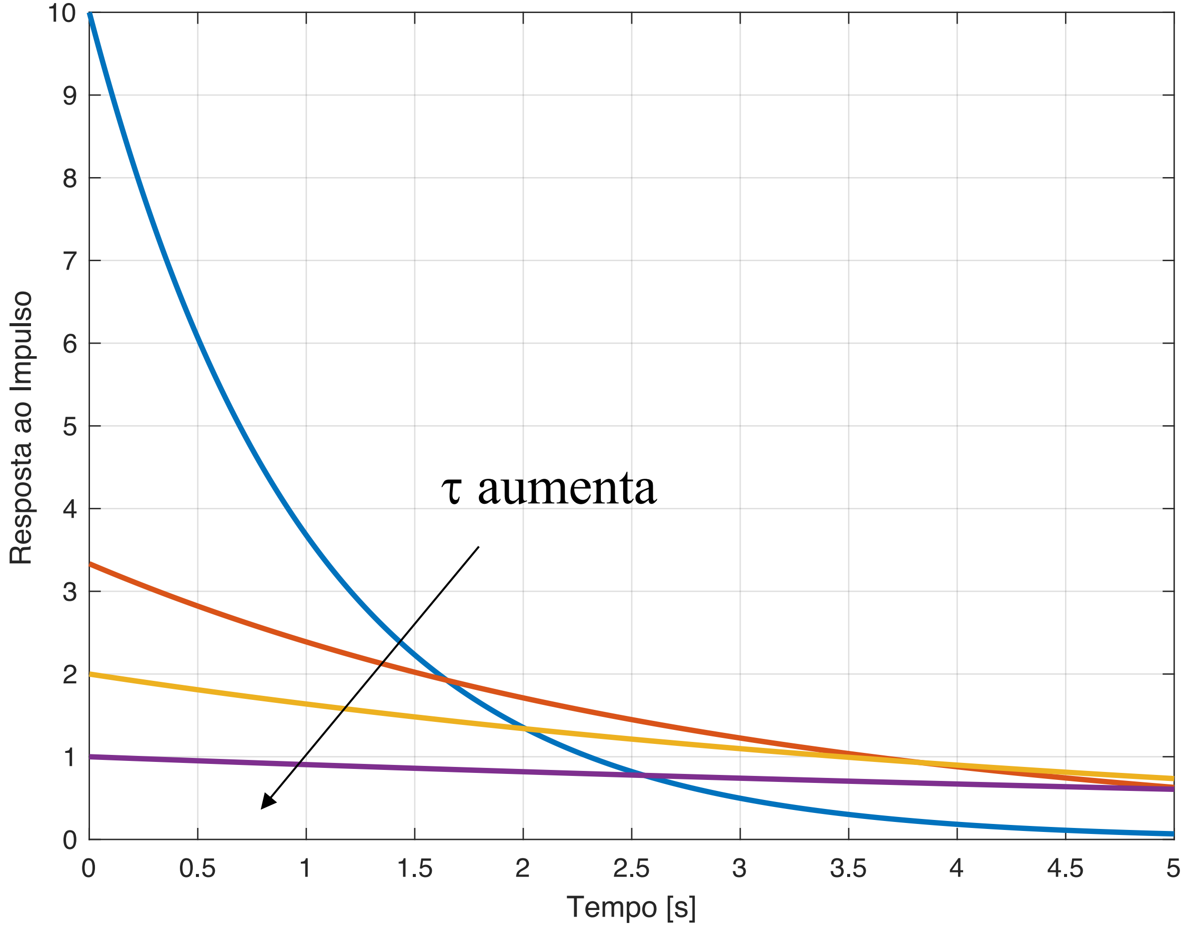
Transformando:

$$\tau(sQ_o(s) - q_o(0)) + Q_o(s) = A_i \Rightarrow Q_o(s) = \frac{\frac{A_i}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{q_o(0)}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$q_o(t) = \frac{A_i}{\tau}(1+q_o(0))e^{-\frac{1}{\tau}t} \Rightarrow q_o(t) = \frac{A_i}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

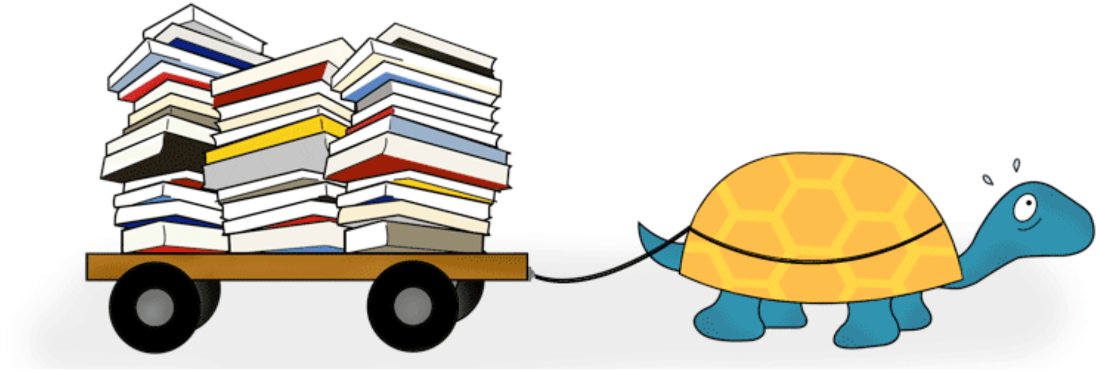
Resposta à uma entrada do tipo Impulso

Graficamente



FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Sistemas de Segunda Ordem

Sequência de Conteúdos

- Conceituação teórica de um sistema de 2ª Ordem
- Definição dos parâmetros físicos que o caracterizam
- Estudo da resposta de um 2ª Ordem à entradas padrão

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

FORMA GERAL

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral para dois casos de interesse:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + \boxed{a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =}$$

$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \boxed{b_1 \frac{dq_i}{dt} + \cdots + b_0 q_i}$$

Modelo # 1

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

Modelo # 2

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Forma Padrão:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_1}{a_0}\frac{dq_i}{dt} + \frac{b_0}{a_0} q_i}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i}$$

Cont. ...

Propriedades importantes:

$$\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

Frequência natural não amortecida (rad/s)

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

Razão ou fator de amortecimento (admensional)

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0}$$

Ganho de regime permanente ([q_o]/[q_i])

Um sistema de segunda ordem fica completamente caracterizado por estas três propriedades

Cont. ...

Portanto, podemos reescrever as EDOs dos dois modelos como

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2q_o}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dq_o}{dt}+q_o=\frac{b_1}{a_0}\frac{dq_i}{dt}+\frac{b_0}{a_0}q_i$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2q_o}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dq_o}{dt}+q_o=\mathbb{K}q_i$$

Considerando condições iniciais nulas, as F.T. para os modelos são

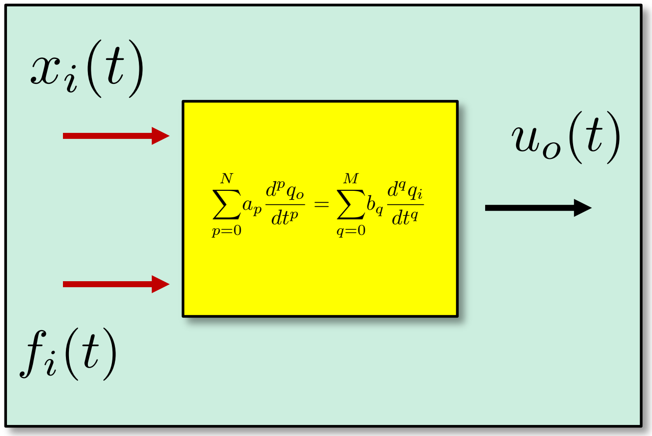
$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}=\frac{\frac{b_1}{a_0}s+\frac{b_0}{a_0}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$

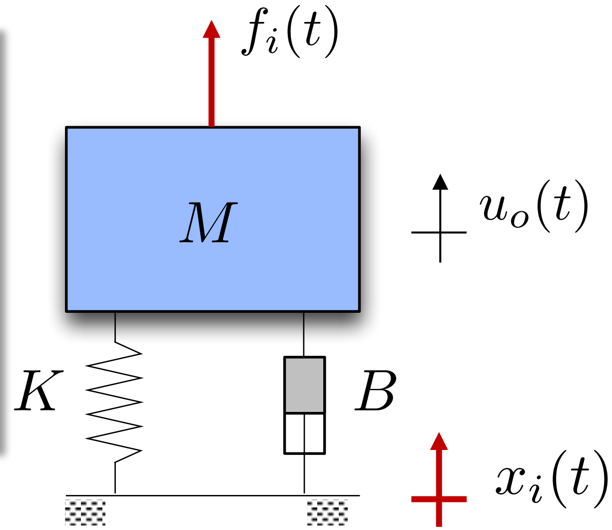
$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}=\frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}$$

Para fins de determinação da resposta à entradas padrão consideraremos o segundo modelo !

Resposta Transiente Sistema de Segunda Ordem (só às CIs)

Um bom modelo para estudarmos a resposta é o massa-mola-amortecedor





$$\left\{ \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \color{red}{(rad/s)} \\ \zeta &= \frac{B}{2\sqrt{kM}} \quad \color{red}{(adm)} \\ \mathbb{K} &= \frac{1}{K} \quad \color{red}{(m/N)} \end{aligned} \right.$$

EDO:

$$M\frac{d^2u_o(t)}{dt^2} + B\frac{du_o}{dt} + Ku_o = \underbrace{f_i(t)}_{\text{força}} + \underbrace{Kx_i(t) + B\dot{x}_i(t)}_{\text{deslocamento}}$$

Forma Padrão:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt} + u_o = \mathbb{K}f_i(t) + x_i(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{x}_i(t)$$

Cont. ...

Se considerarmos as entradas individualmente temos as seguines EDOs

Entrada $f_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=\mathbb{K}f_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(s)=\frac{U_o(s)}{F_i(s)}=\frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}}$$

Entrada $X_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=x_i+\frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{x}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(s)=\frac{U_o(s)}{X_i(s)}=\frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}}$$

Para a resposta transiente :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt}+u_o=0} \qquad u_o(0)\neq 0 \quad \dot{u}_o(0)\neq 0$$

Cont. ...

Para o estudo da resposta transiente fazemos $f_i(t) = 0$ e então

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2u_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{du_o}{dt} + u_o = 0$$

Tomando a T.L. para condições iniciais quaisquer temos

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)U_o(s) - (s + 2\zeta\omega_n)u_o(0) - \dot{u}_o(0) = 0$$

E resolvendo algebricamente para $U_o(s)$

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A solução no domínio do tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace desta última expressão. No entanto, esta transformação depende da natureza das raízes da ***equação característica do sistema***

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Equação característica

Cont. ...

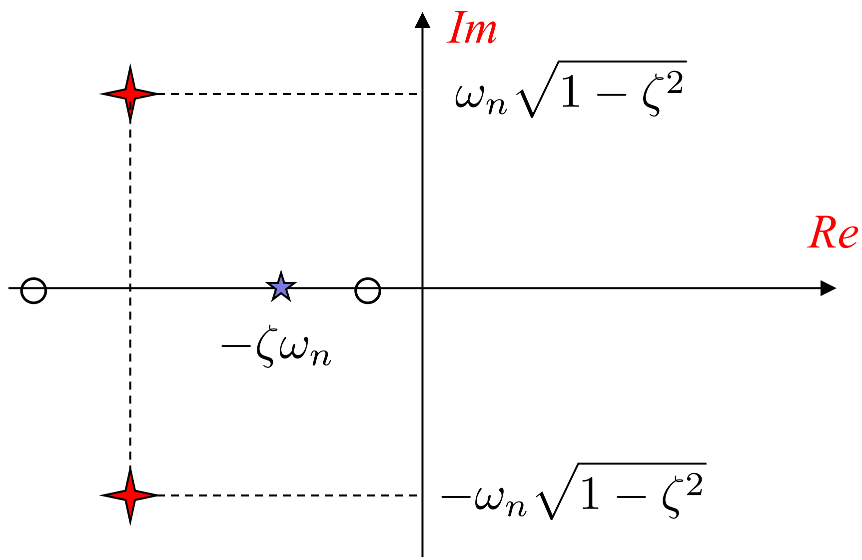
Temos três possibilidades:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- *Reais e distintas* $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \;\Leftrightarrow\; \zeta > 1$ *sobreamortecido*
- *Reais e iguais* $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \;\Leftrightarrow\; \zeta = 1$ *criticamente amortecido*
- *Complexas* $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \;\Leftrightarrow\; 0 < \zeta < 1$ *subamortecido*

mais importante !

Plano Complexo



$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$B_c = 2\sqrt{KM}$$

amortecimento crítico

$$\boxed{\zeta = \frac{B}{B_c}}$$

As raizes $s_{1,2}$ são denominadas pólos do sistema !

Cont. ...

Para obtermos a resposta transiente para os três casos retornemos à solução:

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E fatoramos o polinômio do denominador em função de suas raízes

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

A solução no domínio do tempo dependerá do valor de ζ ! então teremos três soluções

$\zeta > 1$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(a_1 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + a_2 e^{+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right)}$$

$$a_1 = \frac{-\dot{u}_o(0) + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_o(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$a_2 = \frac{\dot{u}_o(0) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_o(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

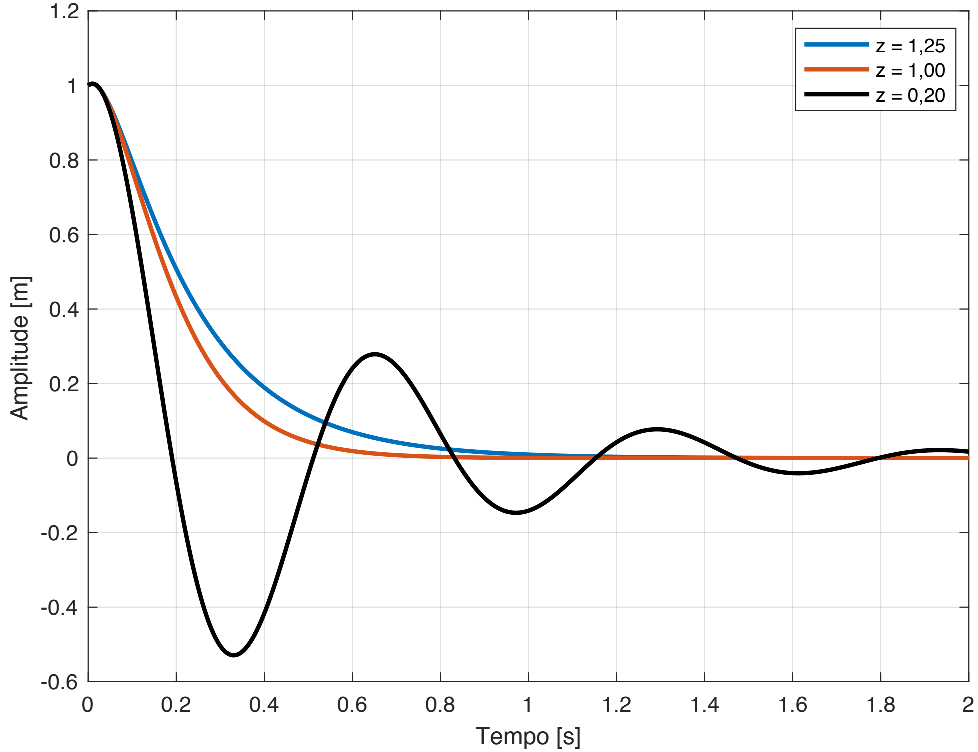
Cont. ...

$\zeta = 1$:

$$u_o(t) = \left[u_o(0) + \left(\dot{u}_o(0) + \omega_n u_o(0)\right) t\right] e^{-\omega_n t}$$

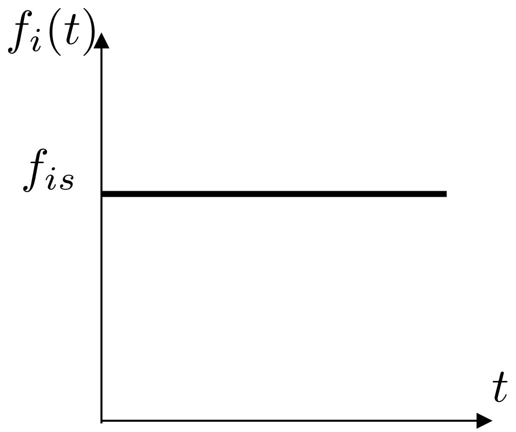
$0 < \zeta < 1{,}0$:

$$u_o(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(u_o(0)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \frac{\dot{u}_o(0) + \zeta\omega_n u_o(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$$



Resposta à Entrada Degrau

Modelo da entrada:



$$f_i(t) = f_{is} u(t)$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + K u_o = f_{is} u(t)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{is} u(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

Aplicando a T.L. a ambos os lados da equação de movimento e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{is}}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

E, calculando a transformada inversa temos a resposta de regime permanente à uma entrada degrau de amplitude f_{is}

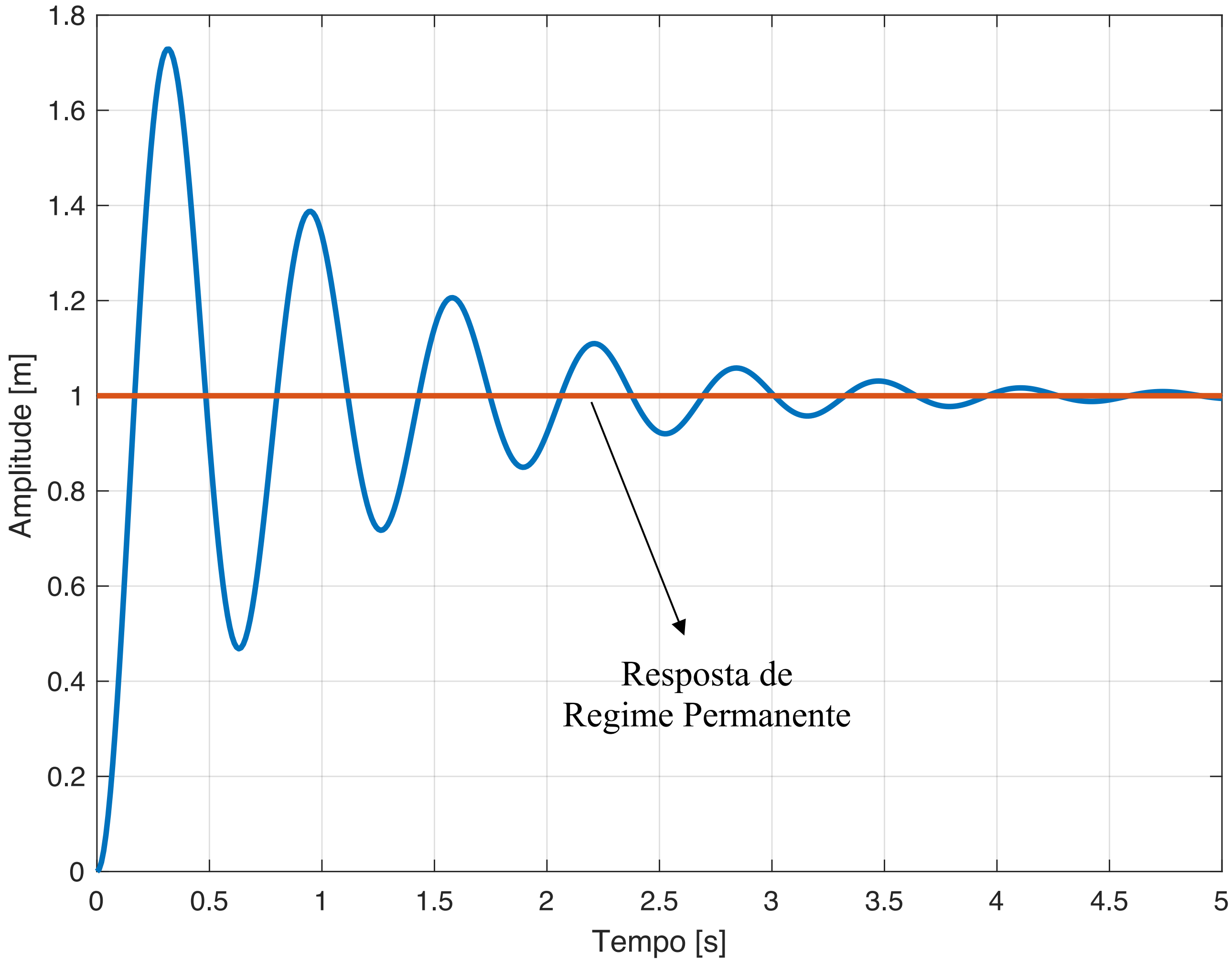
$$u_o(t) = \mathbb{K} f_{is} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \mathrm{sen}\omega_d t + \cos\omega_d t \right) \right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

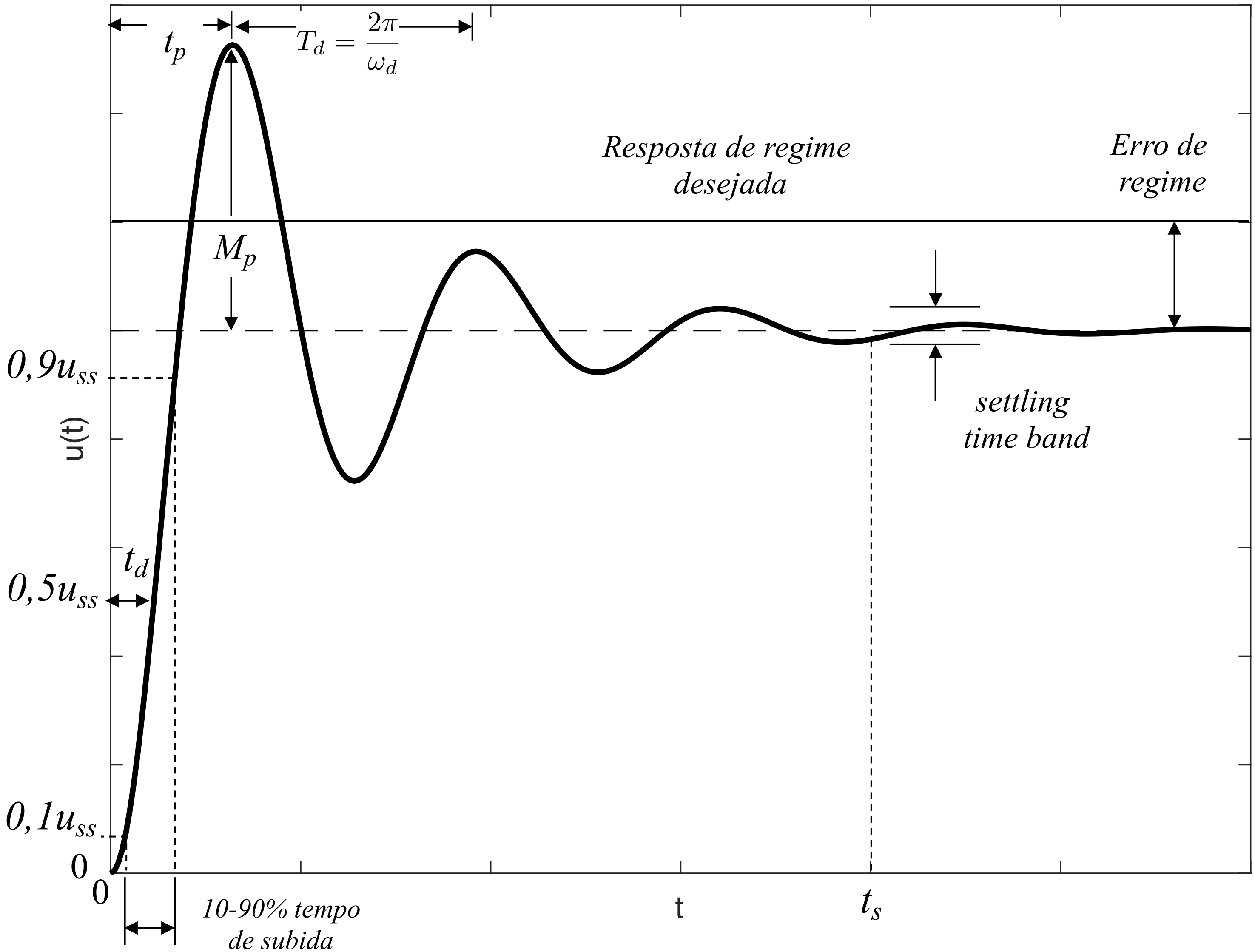
$$\boxed{u_o(t) = \mathbb{K} f_{is} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \right]}$$

Cont. ...

Gráfico da resposta à um *degrau unitário* ($f_{is} = 1$) e *condições iniciais nulas*



Análise da Resposta ao Degrau



Análise da Resposta ao Degrau Unitário

Overshoot Máximo (Mp :) (Sobresinal Máximo)

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \\[2ex] u(t_p) = u_p = \mathbb{K} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases}$$

Tempo de subida (rise time) (t_r) :

$$t_r = \frac{2\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Settling time 2% (t_s) : (Tempo de acomodação)

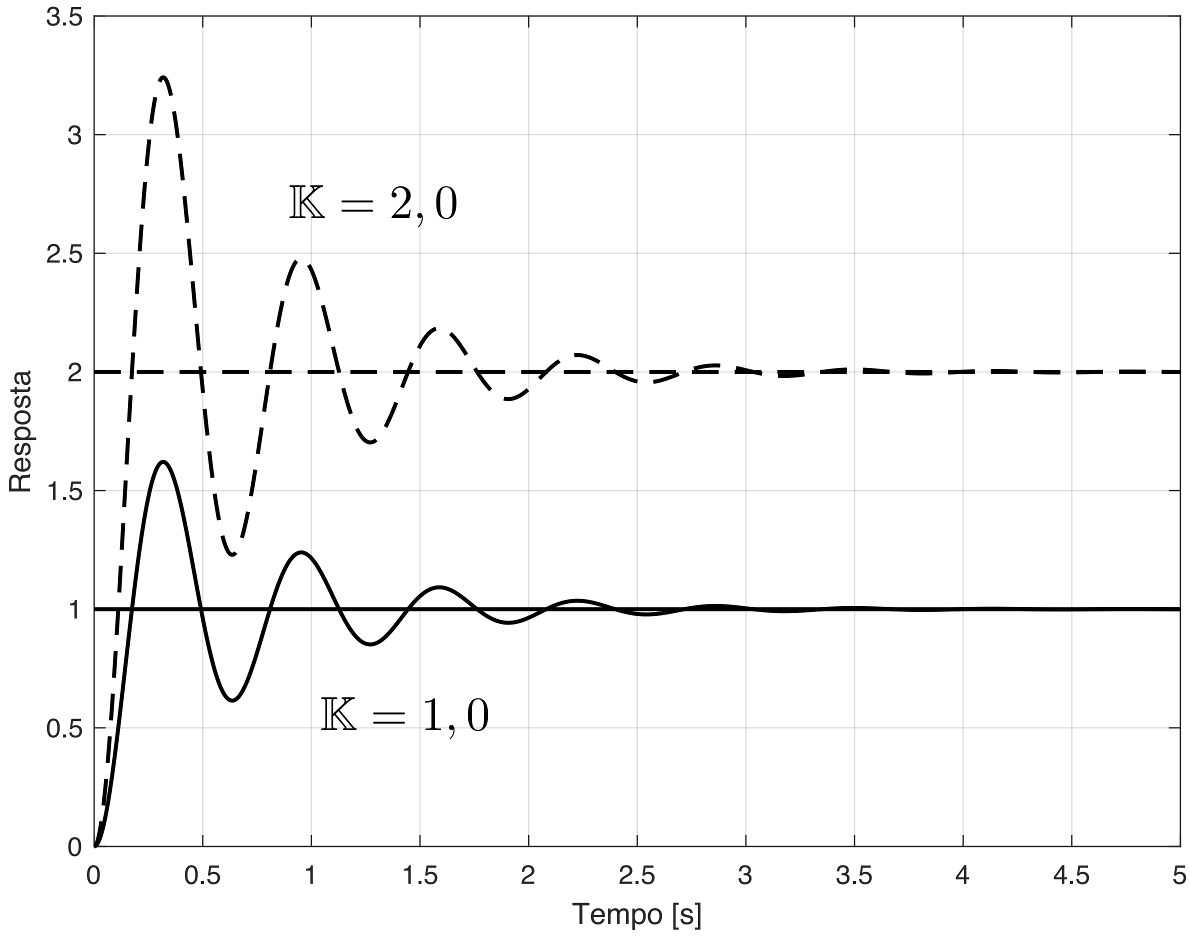
$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

delay time (t_d): (Atraso)

$$t_d \cong \frac{1 + 0,7\zeta}{\omega_n}$$

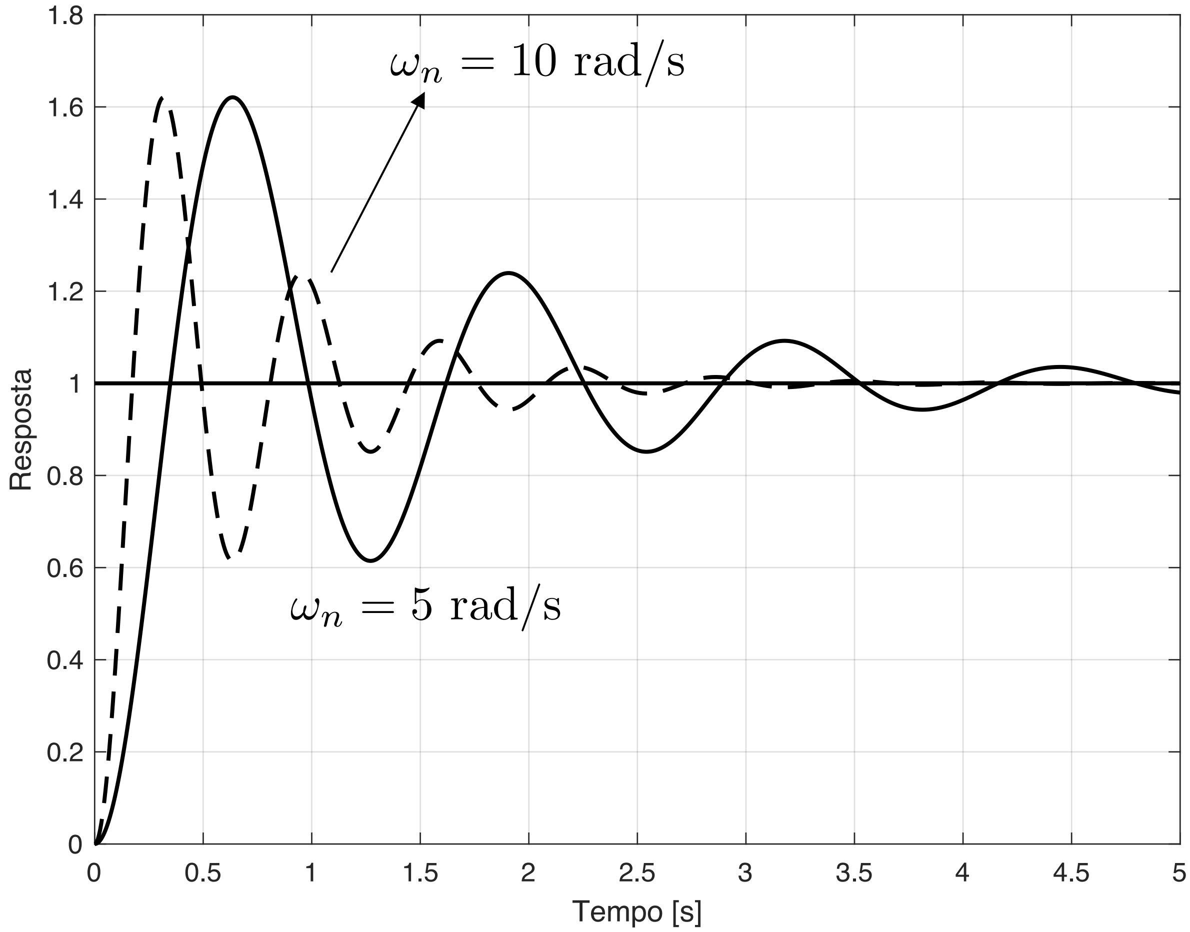
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

GANHO DE REGIME PERMANENTE



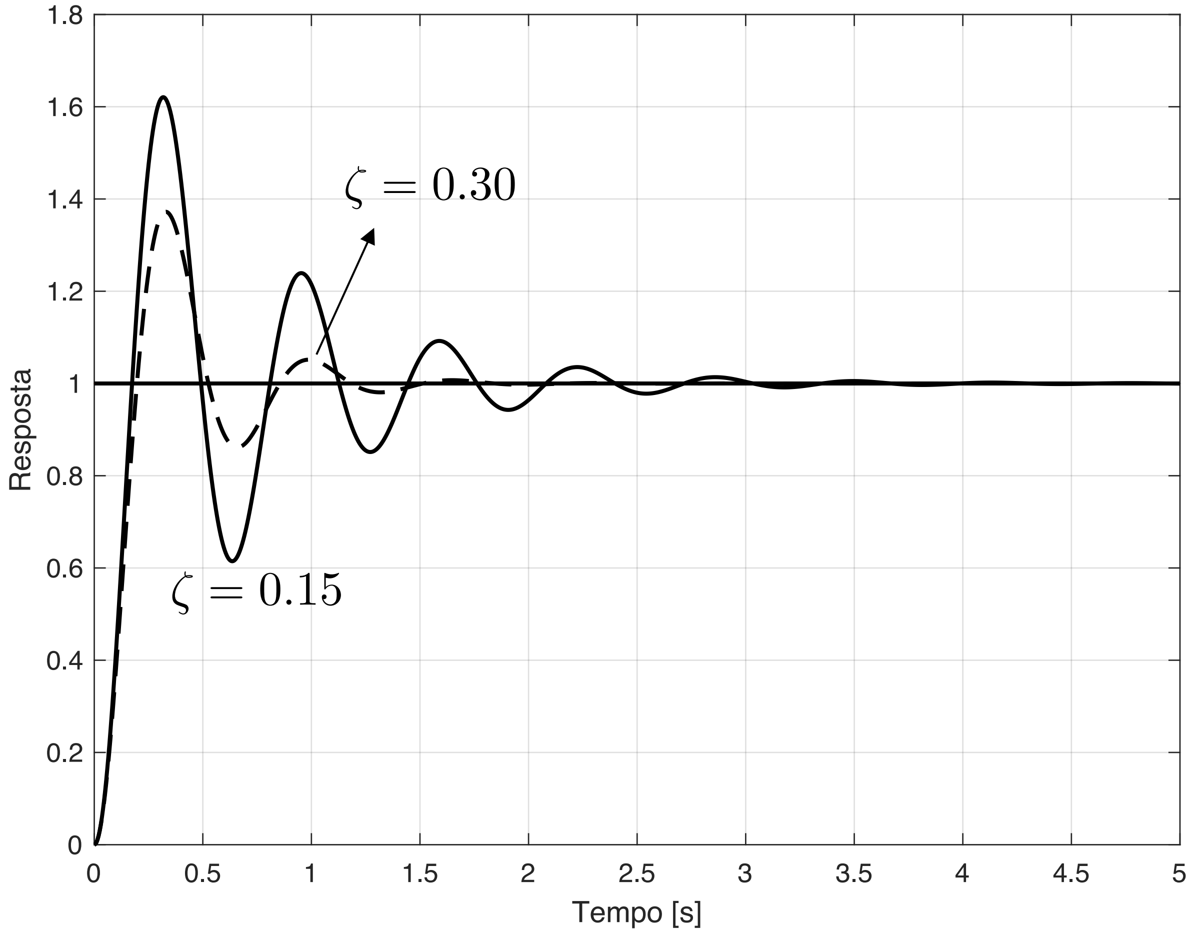
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

FREQUÊNCIA NATURAL NÃO AMORTECIDA



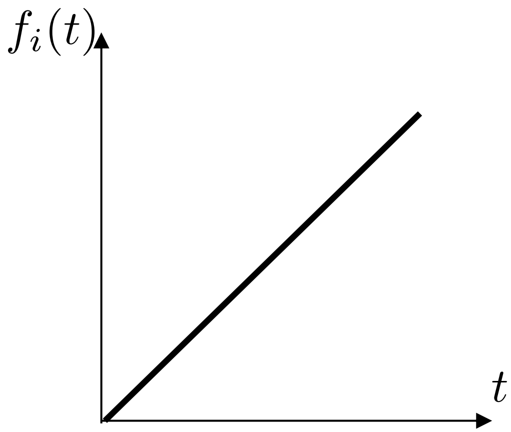
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

FATOR DE AMORTECIMENTO



Resposta à Entrada Rampa

Modelo da entrada:



Rampa Unitária: $f_{ir} = 1$

$$f_i(t) = f_{ir} t \qquad F_i(s) = \frac{f_{ir}}{s^2}$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + Ku_o = f_{ir} t$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{ir} t$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

Aplicando a T.L. e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{s^2(s - s_1)(s - s_2)}$$

e, usando as propriedades da transformada inversa de Laplace a resposta de regime permanente à entrada rampa é escrita como

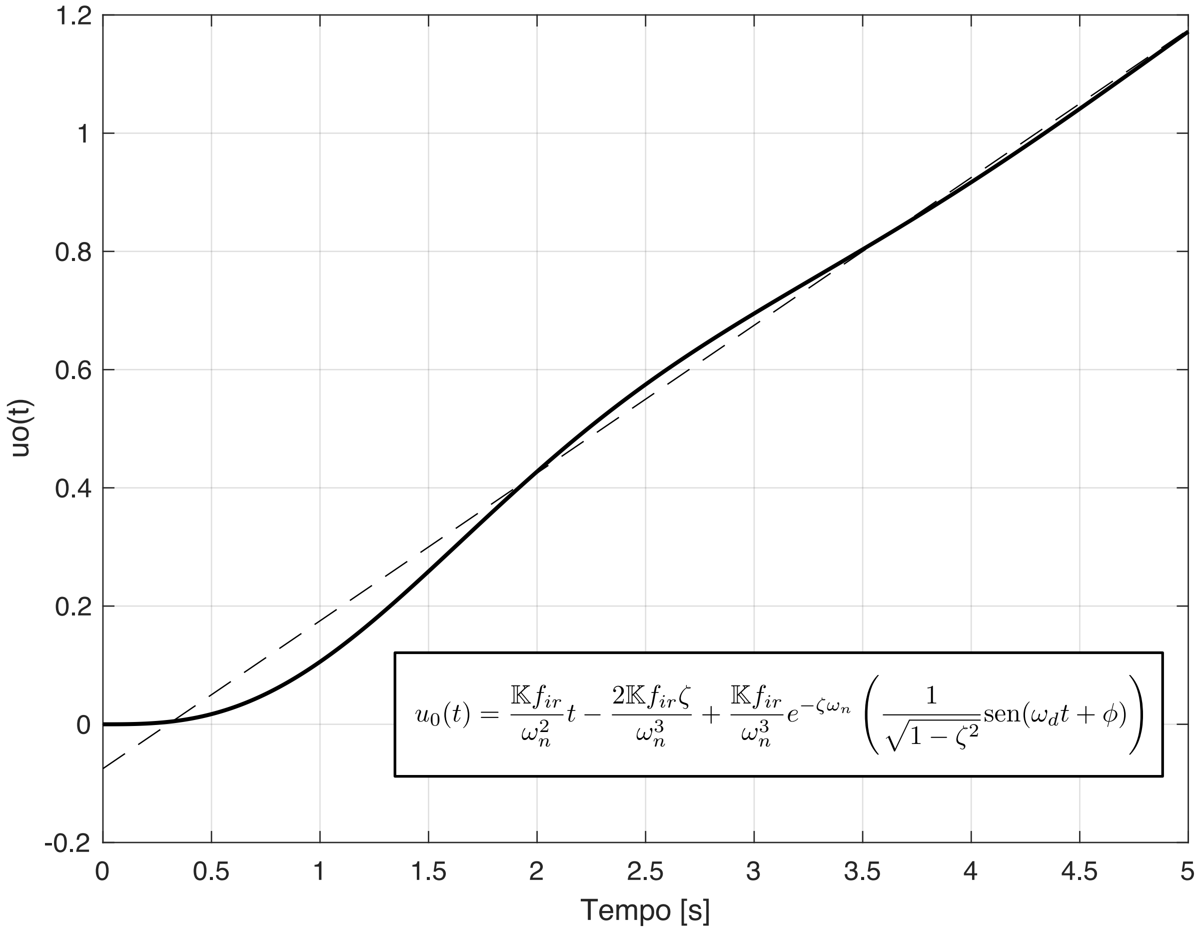
$$u_0(t) = \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{\omega_n^2} t - \frac{2\mathbb{K} f_{ir}\zeta}{\omega_n^3} + \frac{\mathbb{K} f_{ir}}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \mathrm{sen}(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

$$\boxed{u_0(t) = \frac{t}{\omega_n^2} - \frac{2\zeta}{\omega_n^3} + \frac{1}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \mathrm{sen}(\omega_d t + \phi) \right)}$$

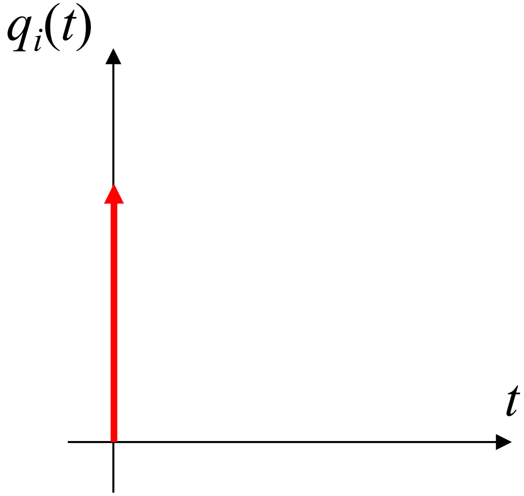
Cont. ...

Gráfico da resposta do sistema de 2ª ordem à rampa unitária



Resposta ao Impulso Unitário

Neste caso:



Impulso unitário: $A_i = 1$

$$q_i(t) = A_i\delta(t) \quad \Rightarrow \quad Q_i(s) = A_i$$

Equação de movimento:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K}A_i\delta(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1{,}0$

Logo, as raizes da equação característica são:

Frequência Natural amortecida !

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

Solução da EDO no domínio de Laplace

$$U_o(s) = \frac{A_i \mathbb{K}}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{u_o(t) = \frac{\mathbb{K} A_i \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \mathrm{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right)}$$

Cabe aqui uma comparação com a resposta transiente ($f_i(t) = 0$) devida somente às condições iniciais

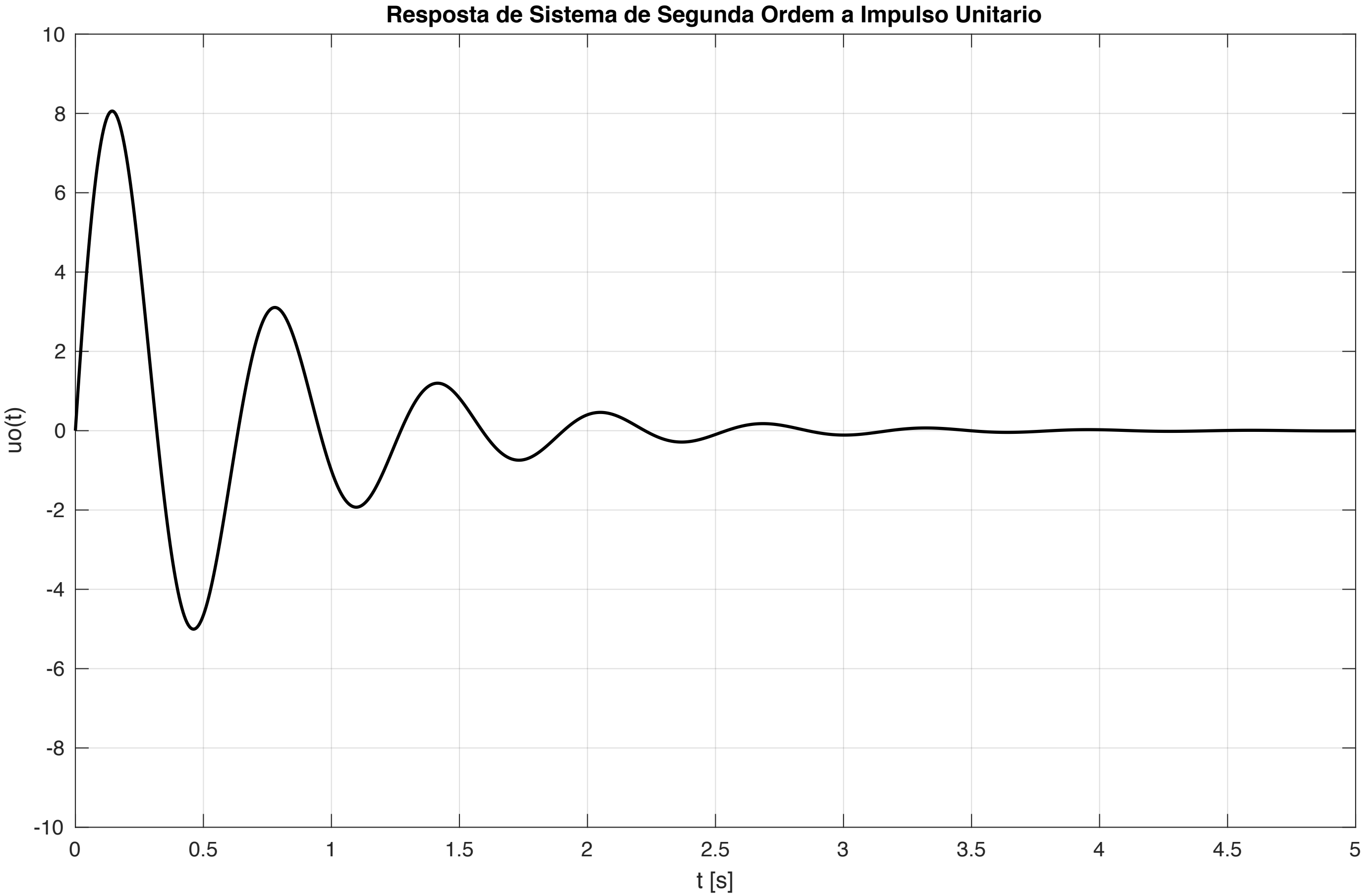
$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n) u_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Se tivermos $u_o(0) = 0$

$$U_o(s) = \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \boxed{u_o(t) = \frac{\dot{u}_o(0)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \mathrm{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right)}$$

Cont. ...

Gráfico da resposta ao impulso unitário, ganho unitário



FIM

Bom Estudo !