Exercício 1

Supor que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias e seja dada pela tabela abaixo

Y \ X	1	2	3
1	9/50	2/50	6/50
2	7/50	6/50	8/50
3	4/50	6/50	2/50

a) Obter as distribuições marginais de X e Y.

b) calcular E(X), E(Y), Var(X), Var(Y);

c) obter $\rho(X, Y)$

d) obter a distribuição de Z=X+Y; usando essa distribuição calcule E(Z); como calcular E(Z) usando item (b)?

e) achar a distribuição de dado Y, dado X=1 e a esperança correspondente E(Y—X=1)) .

Solução

a) A distribuição conjunta de X e Y é dada por,

Y \ X	1	2	3	
1	9/50	2/50	6/50	**17/50**
2	7/50	6/50	8/50	**21/50**
3	4/50	6/50	2/50	**12/50**
	20/50	**14/50**	**16/50**	

Logo as distribuições marginais de Y e X são dadas respectivamente pelas tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Distribuição marginal de Y.

Y	1	2	3
	17/50	21/50	12/50

Tabela 2: Distribuição marginal de X.

X	1	2	3
	20/50	14/50	16/50

b) Temos que,

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \frac{17}{50} + 2 \times \frac{21}{50} + 3 \times \frac{12}{50} \\ &= \frac{17}{50} + \frac{42}{50} + \frac{36}{50} = \frac{95}{50} = 1.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{20}{50} + 2 \times \frac{14}{50} + 3 \times \frac{16}{50} \\ &= \frac{20}{50} + \frac{28}{50} + \frac{48}{50} = \frac{96}{50} = 1.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1 \times \frac{17}{50} + 2^2 \times \frac{21}{50} + 3^2 \times \frac{12}{50} \\ &= \frac{17}{50} + \frac{84}{50} + \frac{108}{50} = \frac{209}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1 \times \frac{20}{50} + 2^2 \times \frac{14}{50} + 3^2 \times \frac{16}{50} \\ &= \frac{20}{50} + \frac{56}{50} + \frac{144}{50} = \frac{220}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{209}{50} - \left(\frac{95}{50}\right)^2 \\ &= \frac{209}{50} - \frac{9025}{2500} = \frac{10450 - 9025}{2500} = \frac{1425}{2500} = 0.57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{220}{50} - \left(\frac{96}{50}\right)^2 \\ &= \frac{220}{50} - \frac{9216}{2500} = \frac{11000 - 9216}{2500} = \frac{1784}{2500} = 0.7136 \end{aligned}$$

De forma que,

E(X)	E(Y)	Var(X)	Var(Y)
1.92	1.9	0.7136	0.57

c) Temos que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 1\times\frac{9}{50} + 2\times\frac{2}{50} + 3\times\frac{6}{50} + 2\times\frac{7}{50} + 4\times\frac{6}{50} + 6\times\frac{8}{50} + 3\times\frac{4}{50} \\
&\quad +6\times\frac{6}{50} + 9\times\frac{2}{50} \\
&= \frac{9}{50} + \frac{4}{50} + \frac{18}{50} + \frac{14}{50} + \frac{24}{50} + \frac{48}{50} + \frac{12}{50} + \frac{36}{50} + \frac{18}{50} \\
&= \frac{183}{50} = 3.66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{183}{50} - \frac{96}{50}\times\frac{95}{50} = \frac{183}{50} - \frac{9120}{2500} = \frac{9150-9120}{2500} = 0.012.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}\sqrt{\mathrm{Var(Y)}}} = \frac{0.012}{\sqrt{0.7136}\sqrt{0.57}} \approx 0.0188.$$

d) Seja Z=X+Y.

Y \ X	1	2	3
1	9/50 **(2)**	2/50 **(3)**	6/50 **(4)**
2	7/50 **(3)**	6/50 **(4)**	8/50 **(5)**
3	4/50 **(4)**	6/50 **(5)**	2/50 **(6)**

Z	2	3	4	5	6
	9/50	2/50 + 7/50	6/50 + 6/50 + 4/50	8/50 + 6/50	2/50

Logo, a distribuição marginal de Z=X+Y é dada por,

Z	2	3	4	5	6
	9/50	9/50	16/50	14/50	2/50

De modo que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= 2\times\frac{9}{50}+3\times\frac{9}{50}+4\times\frac{16}{50}+5\times\frac{14}{50}+6\times\frac{2}{50} \\ &= \frac{18}{50}+\frac{27}{50}+\frac{64}{50}+\frac{70}{50}+\frac{12}{50}=\frac{191}{50} \end{aligned}$$

Usando o item (b) podemos obter,

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\frac{96}{50}+\frac{95}{50}=\frac{191}{50}.$$

e) Note que,

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(Y=1\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{9/50}{20/50}=\frac{9}{20}=0.45$$

$$P(Y=2|X=1)=\frac{P(Y=2\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{7/50}{20/50}=\frac{7}{20}=0.35$$

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(Y=3\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{4/50}{20/50}=\frac{4}{20}=0.2$$

Logo, a distribuição de Y dado X=1 é dada por,

Tabela 3: Distribuição marginal de $Y|X=1$.

Y	1	2	3
$P(Y\|X=1)$	0.45	0.35	0.2

E portanto,

$$\mathrm{E}(Y|X=1)=1\times 0.45+2\times 0.35+3\times 0.2=0.45+0.7+0.6=1.75.$$

Exercício 2

A tabela abaixo descreve a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y para uma grupo de 100 alunos, em que X e Y denotam, respectivamente, o número de vezes que o aluno foi ao teatro em janeiro e fevereiro de 2013.

Y \ X	0	1	2	3
0	20/100	13/100	5/100	2/100
1	15/100	10/100	4/100	1/100
2	5/100	10/100	3/100	2/100
3	4/100	3/100	2/100	1/100

a) Obter as distribuições marginais de X e Y.

b) Calcule as médias de X e Y.

c) Se um aluno foi ao teatro em janeiro qual a probabilidade de não ter ido em fevereiro?

d) Se um aluno foi ao teatro em fevereiro qual a probabilidade de também ter ido em janeiro?

Solução

a) A distribuição conjunta é dada por,

Y \ X	0	1	2	3	
0	20/100	13/100	5/100	2/100	**40/100**
1	15/100	10/100	4/100	1/100	**30/100**
2	5/100	10/100	3/100	2/100	**20/100**
3	4/100	3/100	2/100	1/100	**10/100**
	44/100	**36/100**	**14/100**	**6/100**	

A distribuição marginal de X é dada por,

X	0	1	2	3
	44/100	**36/100**	**14/100**	**6/100**

A distribuição marginal de Y é dada por,

Y	0	1	2	3
	40/100	**30/100**	**20/100**	**10/100**

b) Temos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 0 \times \frac{40}{100} + 1 \times \frac{30}{50} + 2 \times \frac{20}{100} + 3 \times \frac{10}{100} \\ &= \frac{0}{100} + \frac{30}{100} + \frac{40}{100} + \frac{30}{100} = \frac{100}{100} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times \frac{44}{100} + 1 \times \frac{36}{50} + 2 \times \frac{14}{100} + 3 \times \frac{6}{100} \\ &= \frac{0}{100} + \frac{36}{50} + \frac{28}{100} + \frac{18}{100} = \frac{82}{100} = 0,82 \end{aligned}$$

c) Queremos determinar a probabilidade de Y=0 (um aluno não ter ido nenhuma vez ao teatro em fevereiro) dado que ele foi ao teatro em janeiro pelo menos uma vez (X=1,ou X=2 ou X=3).

Vamos denotar A={(X=1∪X=2∪X=3).} Temos que,

$$\begin{aligned} P(Y=0|A) &= \frac{P(Y=0\cap A)}{P(A)} = \frac{P(Y=0\cap(X=1\cup X=2\cup X=3)}{P(A)} \\ &= \frac{P((Y=0\cap X=1)\cup(Y=0\cap X=2)\cup(Y=0\cap X=3))}{P(A)} \\ &= \frac{P(Y=0\cap X=1)+P(Y=0\cap X=2)+P(Y=0\cap X=3)}{P(A)} \\ &= \frac{13/100+5/100+2/100}{56/100} = \frac{20/100}{56/100} = \frac{20}{56} \end{aligned}$$

d) Queremos determinar a probabilidade de um aluno ter ao teatro em janeiro (X=1,ou X=2 ou X=3) dado que ele foi ao teatro em fevereiro (Y=1,ou Y=2 ou Y=3).

Vamos denotar B={(Y=1,ou Y=2 ou Y=3).} Note que,

$$\begin{aligned} P(X=0|B) &= \frac{P(X=0\cap B)}{P(B)} = \frac{P(X=0\cap(Y=1\cup Y=2\cup Y=3)}{P(B)} \\ &= \frac{P((X=0\cap Y=1)\cup(X=0\cap Y=2)\cup(X=0\cap Y=3))}{P(B)} \\ &= \frac{P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)+P(X=0\cap Y=3)}{P(B)} \\ &= \frac{15/100+5/100+4/100}{60/100} = \frac{24/100}{60/100} = \frac{24}{60} = 0.4 \end{aligned}$$

Portanto,

$$P((X=0)^c|B) \quad = \quad 1-0.4=0.6$$

Note que o complementar de não ir ao teatro em janeiro (X=0) é ir ao teatro. Logo, a probabilidade de ir ao teatro em janeiro dado que ele foi ao teatro em fevereiro é 0.6.

Exercício 3

A distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada abaixo:

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a) Verifique se X e Y são independentes,

b) Obtenha $\rho(X,Y)$, comente

Solução

a) Observe que,

Y \ X	-1	0	1	
-1	1/8	1/8	1/8	**3/8**
0	1/8	0	1/8	**2/8**
1	1/8	1/8	1/8	**3/8**
	3/8	**2/8**	**3/8**	

Note que, $p_{22}=0$ e $p_{2\cdot}p_{\cdot 2}=2/8\times 2/8=4/64$ donde segue que, $p_{22}\neq p_{2\cdot}p_{\cdot 2}$. Portanto, as variáveis não são independentes.

Notação:

- p_{22}=P(X=0,Y=0)
- $p_{2\cdot}=P(Y=0)$
- $p_{\cdot 2}=P(X=0)$

b) Note que,

$$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$$

$$E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$$

$$E(XY) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

Portanto, $\rho(X, Y) = 0$. Observe que embora a correlação entre as variáveis seja nula elas não são independentes.

É interessante ressaltar que variáveis independentes implicam em correlação nula, mas a recíproca não é verdadeira, como podemos constatar neste exemplo.