Lista 12 - MAT-330

(I) Considere os conjuntos A, A', B, B', com $A \cap B = \emptyset$ e $A' \cap B' = \emptyset$. Se $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ então $A \cup B \equiv A' \cup B'$.

(II) Considere os conjuntos A, A', B, B'. Se $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ então $A \times B \equiv A' \times B'$.

(III) Dados os conjuntos A e B, definimos B^A como o conjunto das funções $f : A \longrightarrow B$ (funções de A em B).

Considere os conjuntos A, A', B, B'. Se $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ então $B^A \equiv \ B'^{A'}$.

Operações com cardinais

Dados os cardinais κ, μ, vamos definir a soma, o produto e a exponenciação desses cardinais.

(a) Considere X, Y conjuntos tais que $|X| = \kappa$ e $|Y| = \mu$, com $X \cap Y = \emptyset$.
Definimos $\kappa + \mu = |X \cup Y|$.

(b) Considere X, Y conjuntos tais que $|X| = \kappa$ e $|Y| = \mu$. Definimos $\kappa.\mu = |X \times Y|$

(c) Considere X, Y conjuntos tais que $|X| = \kappa$ e $|Y| = \mu$. Definimos $\mu^\kappa = |Y^X|$

(1) Dados cardinais κ, μ, λ, prove que:

(i) $\kappa + \mu = \mu + \kappa$

(ii) $(\kappa + \mu) + \lambda = \kappa + (\mu + \lambda)$

(iii) $\kappa.\mu = \mu.\kappa$

(iv) $(\kappa.\mu).\lambda = \kappa.(\mu.\lambda)$

(v) $\kappa(\mu + \lambda) = \kappa.\mu + \kappa + \lambda$

(vi) $\kappa + \kappa = 2\kappa$

(vii) $\kappa.\kappa = \kappa^2$

(viii) $\mu < \mu^\kappa$ se $\kappa > 0$

(ix) $\kappa < \mu^\kappa$ se $\mu > 1$

(2) Dados cardinais $\kappa_1, \kappa_2, \mu_1, \mu_2$, prove que

(i) $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \ \kappa_1 + \mu_1 \leq \kappa_2 + \mu_2$

(ii) $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \ \kappa_1.\mu_1 \leq \kappa_2.\mu_2$

(iii) $\kappa_1 \leq \kappa_2$ e $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \; \mu_1^{\kappa_1} \leq \mu_2^{\kappa_2}$

(3) Prove que, dados α, β ordinais,

(i) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{max\{\alpha,\beta\}}$

(ii) $\aleph_\alpha . \aleph_\beta = \aleph_{max\{\alpha,\beta\}}$

(iii) $\aleph_0^{\aleph_0} = c = |\mathbb{R}|$

(iv) $c^{\aleph_0} = c$

(v) $c.c = c$ (portanto, $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}$)

(vi) $n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha, \forall \; n \in \omega$

(4) Determine a cardinalidade do conjunto A:

(i) A é o conjunto de todas as sequências de números naturais.

(ii) A é o conjunto de todas as sequências de números reais.

(iii) A é o conjunto de todas as funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$.

(5) (i) Seja $[\aleph_\alpha]^n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\aleph_\alpha$ com n elementos. Prove que $|[\aleph_\alpha]^n| = \aleph_\alpha$.

(ii) Seja $[\aleph_\alpha]^\omega$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\aleph_\alpha$. Prove que $|[\aleph_\alpha]^\omega| = \aleph_\alpha$.