# Lista 19 MAT-206 MAT-216

(I) Determine o conjunto dos números $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função é derivável. Calcule a derivada onbde ela existir.

(i) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(iii) $f(x) = |x - 2|$

(iv) $f(x) = |x^2 - 1|$

(v) $f(x) = \begin{cases} x^4 sen\dfrac{1}{x^4} + 2x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(vi) $f(x) = (3x + 1)^{x^2}$

(II) Seja $f(x) = x^3|x|$. Calcule $f'(x), f''(x), f'''(x) e f^{(4)}(x)$ onde existir. Esboce os gráficos dessas funções.

(III) Sabe-se que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável, para todo $x \neq x_0$.
Se existe $\lim_{x \longrightarrow x_0} f'(x) = l$, prove que $f$ também é derivável em $x_0$ e $f'(x_0) = l$.
Sugestão: utilize o Teorema do Valor Médio.)

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Mostre que $f$ é derivável em $\mathbb{R}$, mas não existe $\lim_{x \longrightarrow x_0} f'(x)$. Este fato entra em contradição com o resultado anterior ?

(IV) Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente se

$\forall\ x_1, x_2 \in [a, b] (x_1 < x_2 \Rightarrow\ f(x_1 \leq f(x_2))$.

A função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente se

$\forall\ x_1, x_2 \in [a, b] (x_1 < x_2 \Rightarrow\ f(x_1 < f(x_2))$.

(a) Mostre que se $f$ é contínua em $[a, b]$ e $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in\ ]a, b[$ então $f$ é estritamente crescente em $[a, b]$.

(b) Seja $f$ contínua em $[a, b]$. Seja $x_0 \in\ ]a, b[$ e suponhamos $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in\ ]a, b[$, $x \neq x_0$, e $f'(x_0) = 0$. Prove que $f$ é estritamente crescente em $[a, b]$.