Geometria Analítica

A reta no Espaço

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Equação Vetorial da Reta

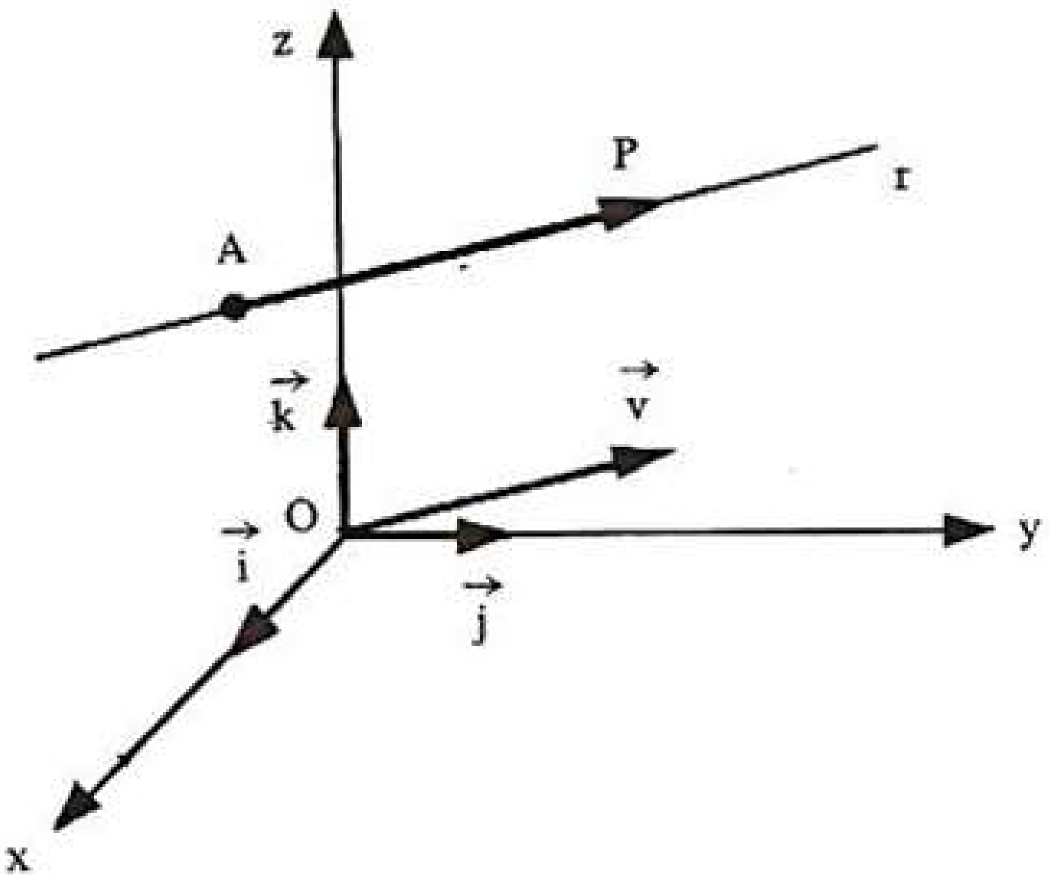
Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não-nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à reta r, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$$

ou

$$P - A = \lambda\vec{v}$$

$$\boxed{P = A + \lambda\vec{v}}$$



Equações Paramétricas da Reta

Sejam $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y, z)$ e $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da reta r, e $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ um vetor de mesma direção de r.

$$P = A + \lambda\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + \alpha\lambda, y_0 + \beta\lambda, z_0 + \gamma\lambda)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

Equações Simétricas da Reta

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_0}{\alpha} \\ \lambda = \dfrac{y - y_0}{\beta} \\ \lambda = \dfrac{z - z_0}{\gamma} \end{cases}$$

$$\boxed{\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}}$$

Estas equações são denominadas **equações simétricas** ou normais de uma reta que passa por um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Equações Reduzidas da Reta

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Estas são as **equações reduzidas da reta**.

Retas paralelas ao plano e aos eixos coordenados

Equações Paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

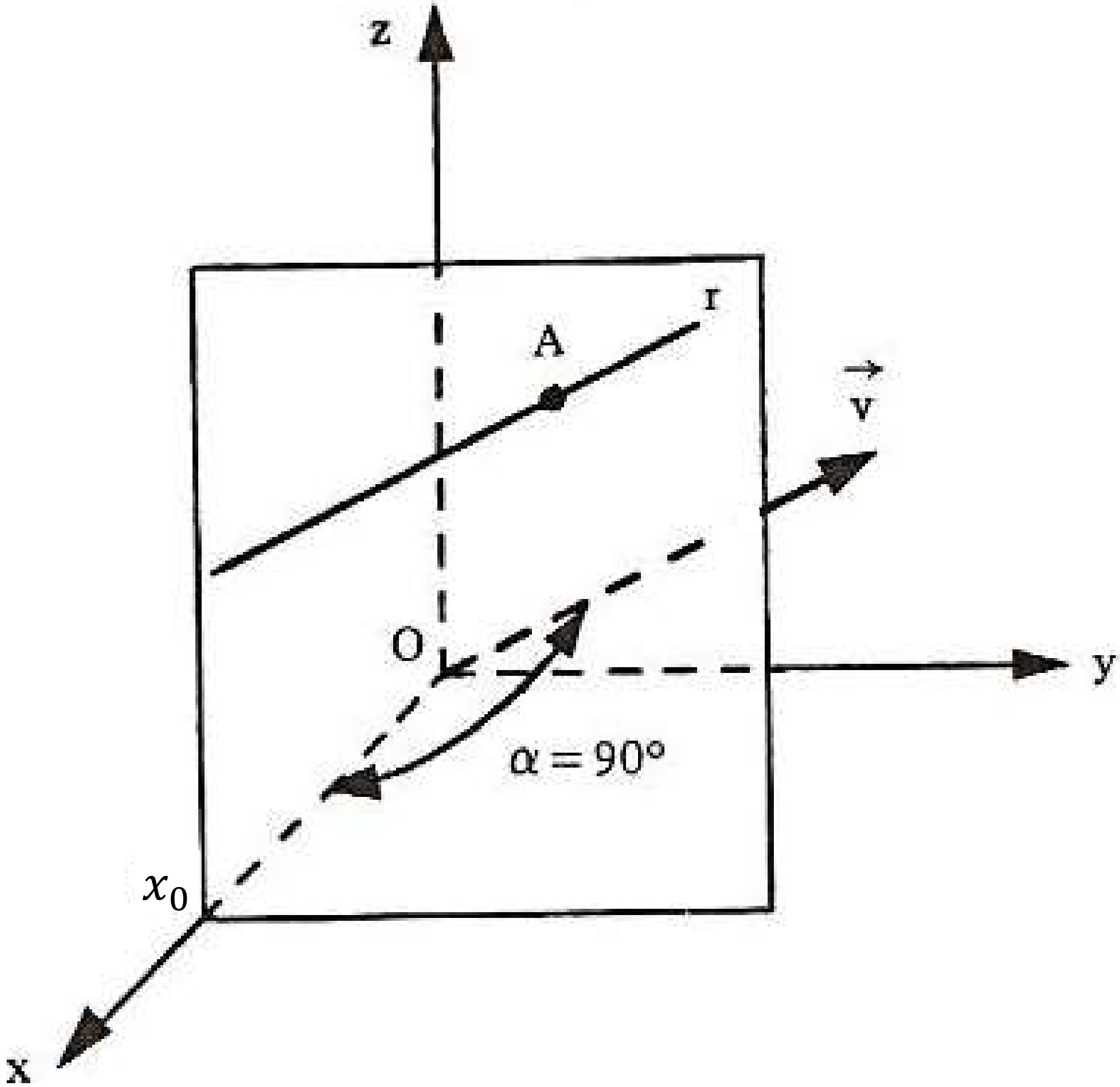
Equações Simétricas

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}}$$

1) Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula.

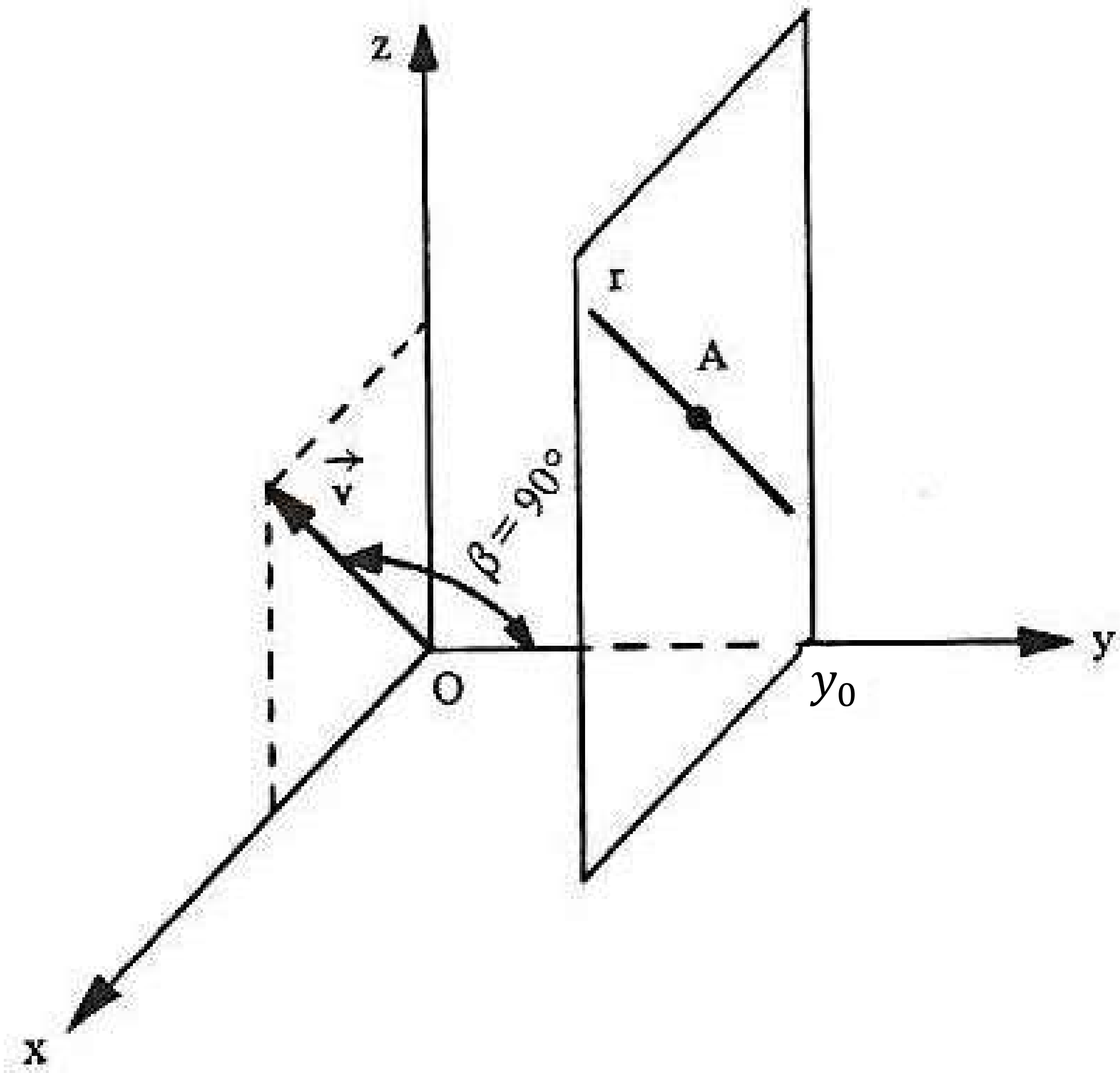
$$\alpha = 0, \vec{v} = (0, \beta, \gamma)$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma} \end{cases}$$



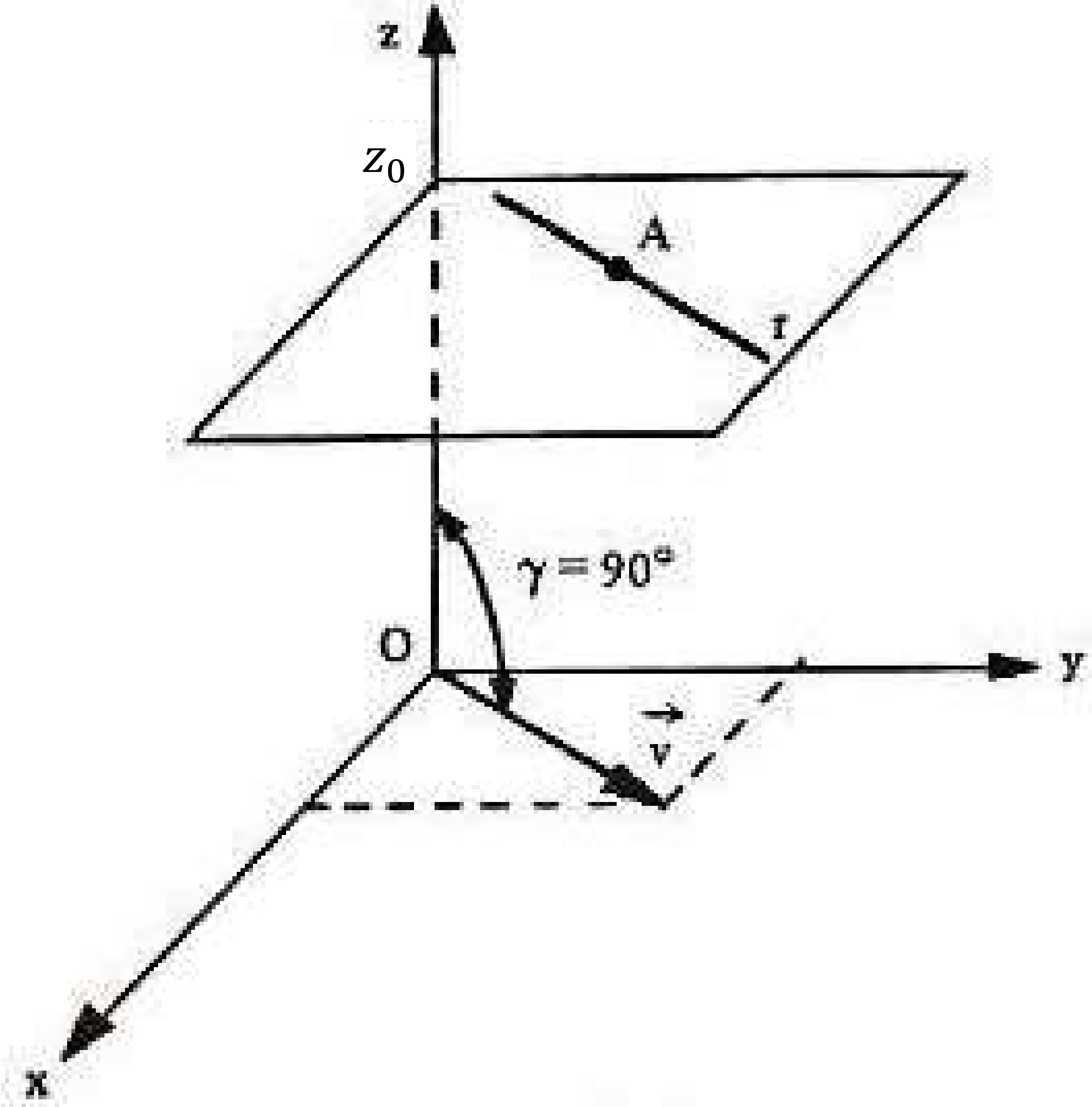
$$\beta = 0, \vec{v} = (\alpha, 0, \gamma)$$

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{z - z_0}{\gamma} \end{cases}$$



$$\gamma = 0, \vec{v} = (\alpha, \beta, 0)$$

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} \end{cases}$$



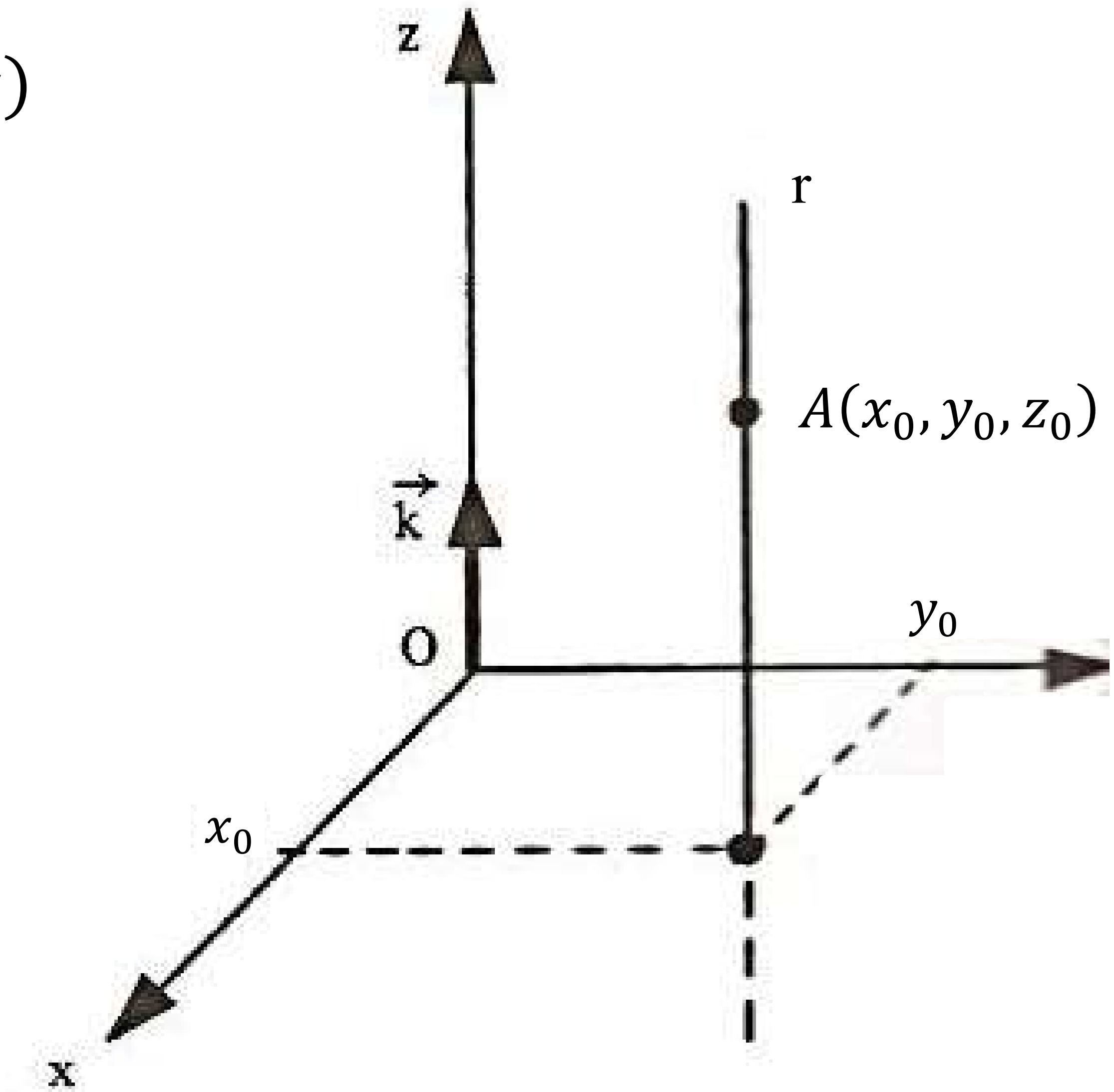
2) Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas.

$$\alpha = \beta = 0, \vec{v} = (0,0,\gamma)$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

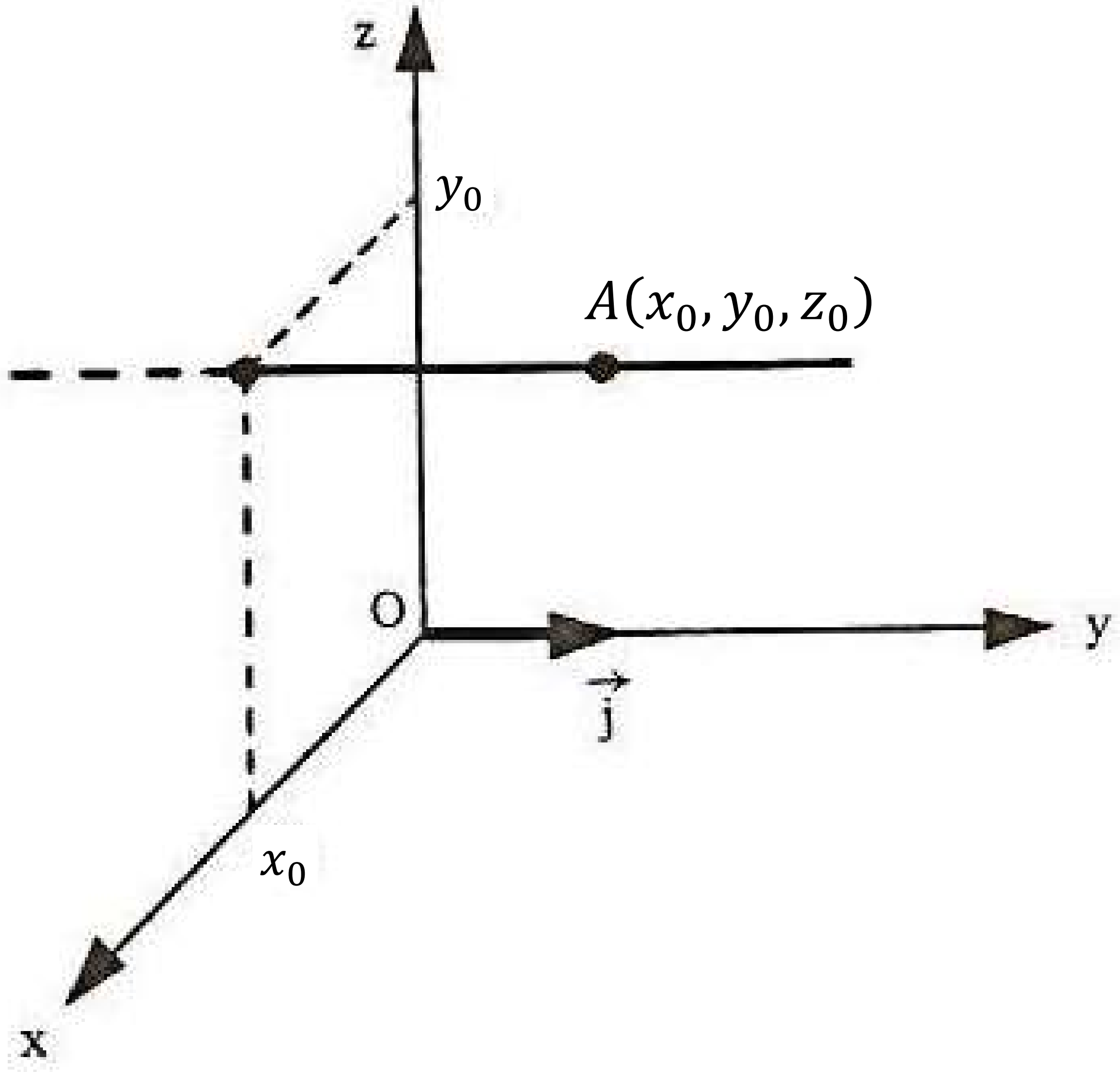


$\alpha = \gamma = 0, \vec{v} = (0, \beta, 0)$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

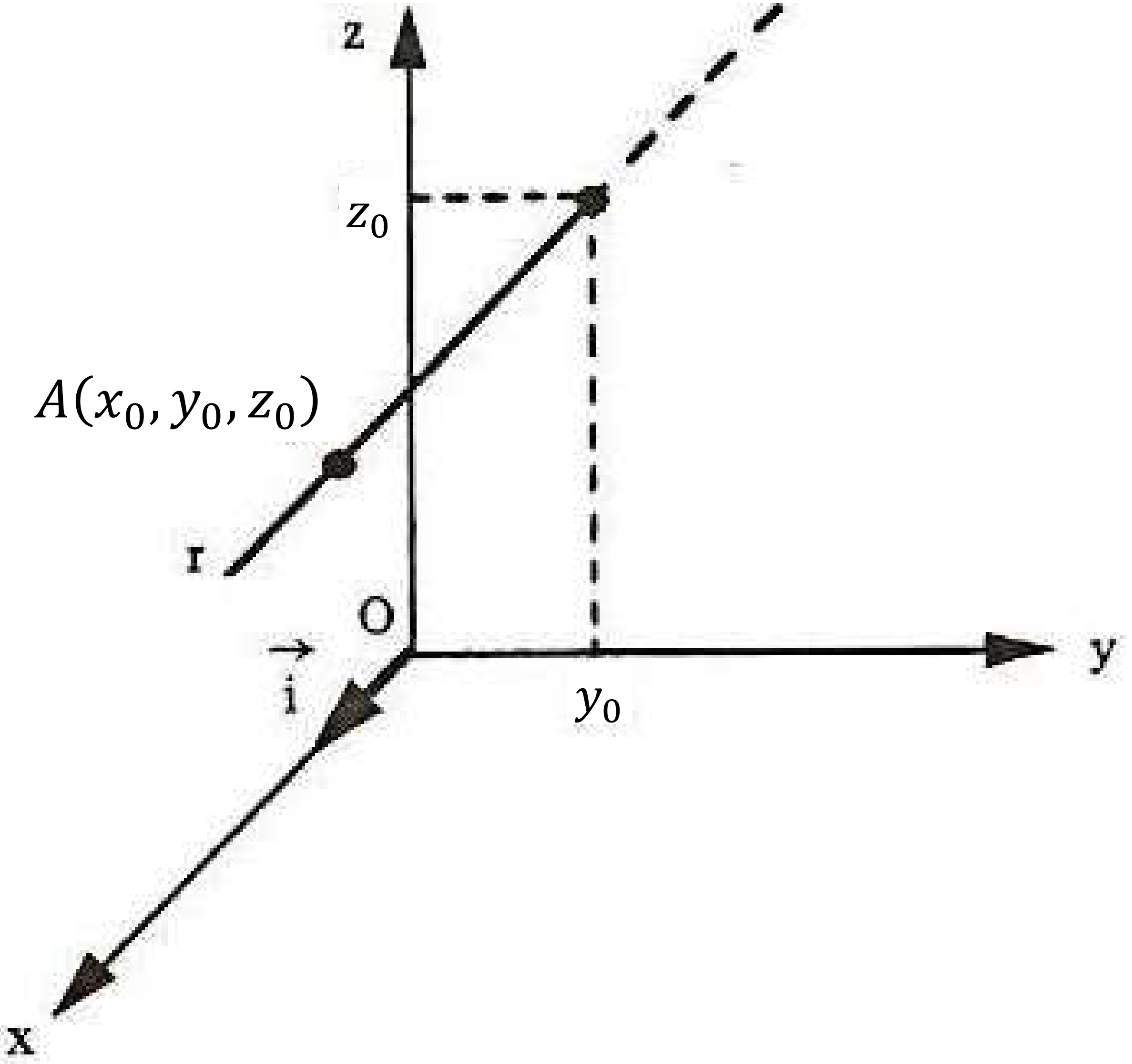


$\beta = \gamma = 0, \vec{v} = (\alpha, 0,0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$



Observação

Os eixos Ox, Oy e Oz são retas particulares, que passam pela origem $O(0,0,0)$ e têm a direção de seus versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

As equações do eixo Ox são: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

As equações do eixo Oy são: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

As equações do eixo Oz são: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Condição de paralelismo de duas retas

A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, que define as direções dessas retas, isto é:

$$\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{v_2} \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$e $\overrightarrow{v_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, que define as direções dessas retas, isto é:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

Exercício

1) Verificar se as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

$$r_1 \quad \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases}$$

$$r_2 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4} \end{cases}$$

Exercício

2) Calcular o valor de m para as retas r e s sejam ortogonais.

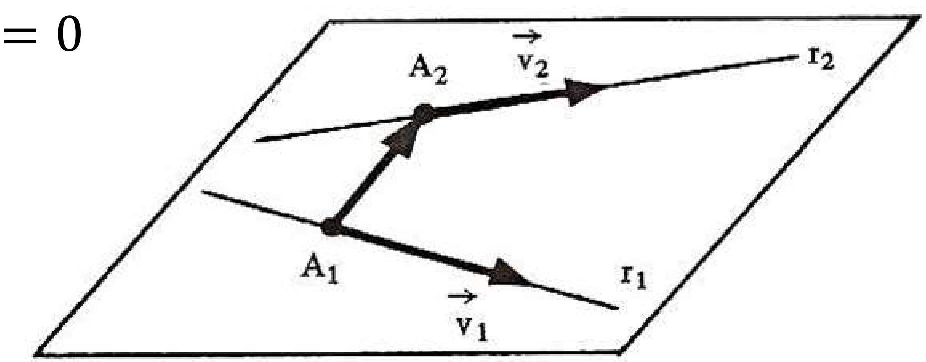
$$r \quad \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases}$$

$$s \quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

Condição de coplanaridade de duas retas

A reta r_1, que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\overrightarrow{v_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, e a reta r_2, que passa por um ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$e tem a direção de um vetor $\overrightarrow{v_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, são coplanares se os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2})$

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Exercício

1) Determinar se as retas r e s são coplanares.

$$r \quad \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \right.$$

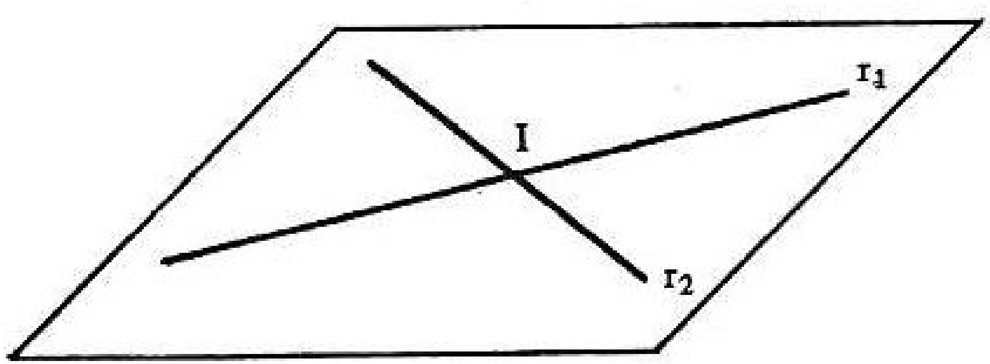
$$s \quad \left\{ \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3} \right.$$

Posições relativas de duas retas

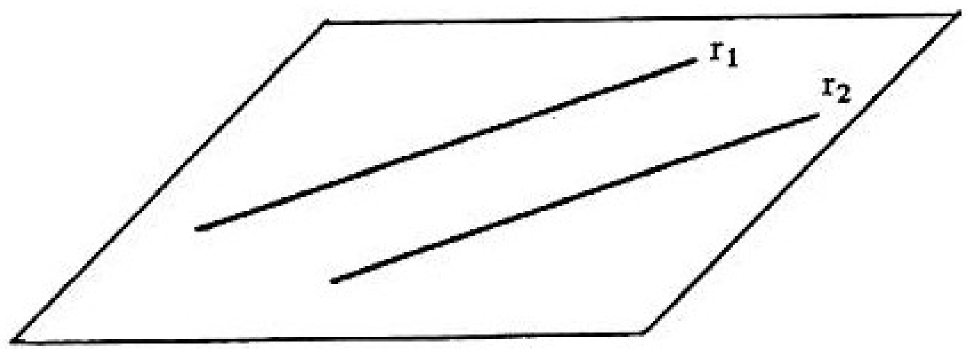
Duas retas r_1 e r_2, no espaço, podem ser:

Coplanares:

- ***Concorrentes***



- ***Paralelas***

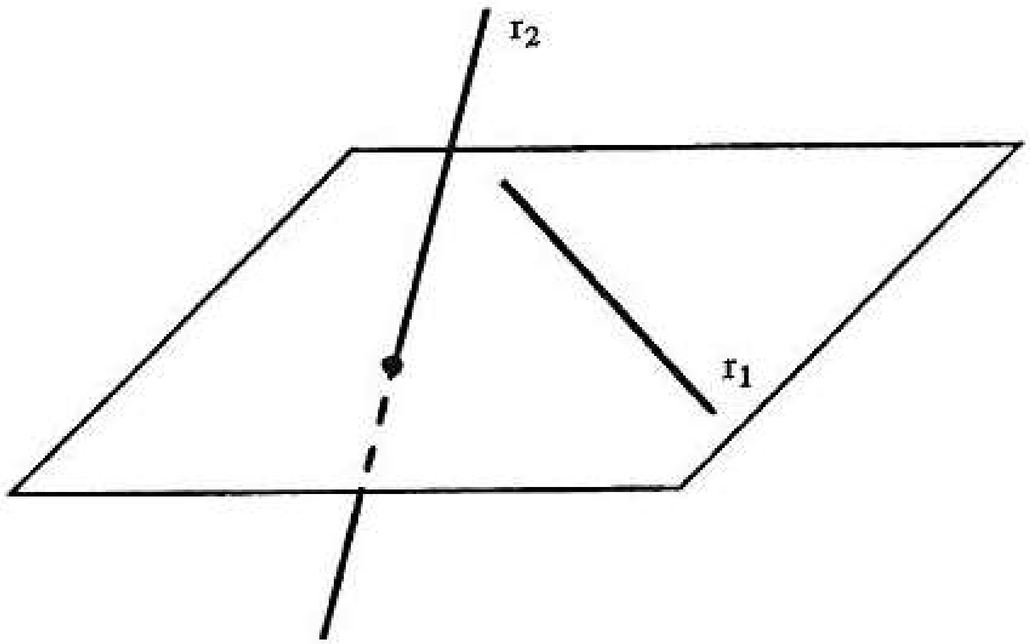


Posições relativas de duas retas

Duas retas r_1 e r_2, no espaço, podem ser:

Reversas

(não situadas no mesmo plano)



Exercício

1) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$$

$$s \quad \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$$

Exercício

2) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \quad \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \right.$$

$$s \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{array} \right.$$

Exercício

3) Estudar a posição relativa das retas:

$$r \quad \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$$

$$s \quad \{ \; x = y = z$$

Interseção de duas retas

Duas retas r e s, coplanares e não paralelas, são concorrentes. Considerando as retas abaixo, encontrar sua interseção.

$$r \quad \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

$$s \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$