

Álgebra Linear e Aplicações

- *Teorema espectral.*
- *Introdução às formas de Jordan.*



AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES E OPERADORES ADJUNTOS, AUTOADJUNTOS, UNITÁRIOS E NORMAIS. (OS RESULTADOS TAMBÉM VALEM PARA AS MATRIZES).

ATÉ O FINAL DAS NOTAS DE HOJE, V É SEMPRE UM ESPAÇO VETORIAL COMPLEXO DE DIMENSÃO FINITA COM UM PRODUTO INTERNO $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

OPERADORES AUTOADJUNTOS

PROPOSIÇÃO: TODO AUTOVALOR DE UM OPERADOR AUTOADJUNTO É REAL.

DEMO: SEJA $v \in V \setminus \{0\}$ E $\lambda \in \mathbb{C}$ TAL QUE $Tv = \lambda v$. LOGO

$$\langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

ASSIM, $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ■

PROPOSIÇÃO: SE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É SIMÉTRICA E $v \in \mathbb{C}^n$, $v = v_R + i v_I$, $v_R, v_I \in \mathbb{R}^n$ É TAL QUE $Av = \lambda v$, PARA $\lambda \in \mathbb{R}$, ENTÃO $Av_R = \lambda v_R$ E $Av_I = \lambda v_I$.

DEMO: $A(v_R + i v_I) = \lambda(v_R + i v_I) \Leftrightarrow \overset{\substack{\uparrow \\ \text{AQUI USAMOS QUE } \lambda \in \mathbb{R}}}{Av_R = \lambda v_R} \text{ E } Av_I = \lambda v_I$. BASTA IGUALAR AS PARTES REAIS E COMPLEXAS.

OPERADORES UNITÁRIOS

PROPOSIÇÃO: SE $\lambda \in \mathbb{C}$ É AUTOVALOR DE UM OPERADOR UNITÁRIO, ENTÃO $|\lambda| = 1$.

DEMO: SEJA $v \in V \setminus \{0\}$ TAL QUE $Tv = \lambda v$. LOGO

$$\langle v, v \rangle = \langle \underbrace{T^*T}_{=I} v, v \rangle = \underbrace{\langle Tv, Tv \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \text{USAMOS } T^* = T. \text{ VÊJA DEMO DO LEMA 2 ADIANTE}}} = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$$

ASSIM, $|\lambda| = 1$ ■

OPERADORES NORMAIS

PROPOSIÇÃO: SEJA $T: V \rightarrow V$ UM OPERADOR NORMAL. SE $v \in V \setminus \{0\}$ É TAL QUE $Tv = \lambda v$, ENTÃO $T^*v = \bar{\lambda}v$.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE

$$\begin{aligned} Tv = \lambda v &\Leftrightarrow (T - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \|(T - \lambda I)v\| = 0 \Leftrightarrow \langle (T - \lambda I)v, (T - \lambda I)v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)v \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v, (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I)v \rangle = \langle v, (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I)v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (T - \lambda I)^*v, (T^* - \bar{\lambda}I)v \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (T^* - \bar{\lambda}I)v, (T^* - \bar{\lambda}I)v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|(T^* - \bar{\lambda}I)v\| = 0 \Leftrightarrow T^*v = \bar{\lambda}v. \end{aligned}$$

USAMOS $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$ (VERIFIQUE!) ■

PROPOSIÇÃO: SEJA $T: V \rightarrow V$ UM OPERADOR NORMAL. SE $Tu = \alpha u$ E $Tv = \beta v$, $\alpha \neq \beta$, ENTÃO $\langle u, v \rangle = 0$.

DEMO: SUPONHA $\alpha \neq 0$ (SE $\alpha = 0$, ENTÃO $\beta \neq 0$ E BASTA TROCAR α COM β).

$$\text{LOGO } \langle u, v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle \alpha u, v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle Tu, v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle u, T^*v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle u, \bar{\beta}v \rangle = \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \langle u, v \rangle.$$

$$\text{ASSIM, } (1 - \frac{\bar{\beta}}{\alpha}) \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0, \text{ POIS } 1 \neq \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \quad \blacksquare$$

TEOREMA ESPECTRAL

TEOREMA: SEJA $T: V \rightarrow V$ UM OPERADOR NORMAL. LOGO EXISTE UMA BASE ORTONORMAL $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ DE V TAL QUE $Te_j = \lambda_j e_j$.

COROLÁRIO: SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ UMA MATRIZ NORMAL. LOGO A É DIAGONALIZÁVEL. ALÉM DISSO, $\exists$ UMA MATRIZ UNITÁRIA $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ TAL QUE $U^*AU = D$, D DIAGONAL.

DEMO DO COROLÁRIO: BASTA OBSERVAR QUE A INDUZ UMA TRANSFORMAÇÃO NORMAL DE $\mathbb{C}^n$ EM $\mathbb{C}^n$ E QUE SE P É FORMADO POR AUTOVECTORES ORTONORMAIS, ENTÃO P É UNITÁRIO E $P^{-1} = P^*$. ■

↓
EM $\mathbb{C}^n$

LEMA 1: SEJA $T: V \rightarrow V$ LINEAR E $W \subset V$ UM SUBESPAÇO. SE $T(W) \subset W$, ENTÃO $T'(W^\perp) \subset W^\perp$.

DEMO: SE $w \in W$ E $v \in W^\perp$, ENTÃO $\langle w, T'v \rangle = \langle Tw, v \rangle = 0$, POIS $Tw \in W$. LOGO $T'v \in W^\perp$ ■

LEMA 2: SEJA $T: V \rightarrow V$ NORMAL E $e \in V \setminus \{0\}$ TAL QUE $Te = \lambda e$. SEJAM $W = [e]$ E $W^\perp = [e]^\perp = \{v \in V : \langle v, e \rangle = 0\}$
LOGO $T(W^\perp) \subset W^\perp$.
 $\{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$

DEMO: COMO $Te = \lambda e$, ENTÃO $T'e = \bar{\lambda}e$. LOGO $T'(W) \subset W$. ASSIM, $T''(W^\perp) \subset W^\perp$, PELO LEMA 1.
MAS $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T'v \rangle = \langle T''u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$. LOGO $T = T''$. PORTANTO, $T(W^\perp) \subset W^\perp$. ■

DEMO DO TEOREMA (POR INDUÇÃO EM $\dim V$):

$\dim V = 1$

NESTE CASO, $V = [e]$ E $Te = \lambda e$. BASTA TOMAR $\mathcal{B} = \left\{ \frac{e}{\|e\|} \right\}$.

SE VALE PARA $\dim V = n$, ENTÃO VALE PARA $\dim V = n+1$

VAMOS ASSUMIR $\dim V = n+1$.

SEJA $v \in V \setminus \{0\}$ UM AUTOVETOR DE T . UM AUTOVETOR SEMPRE EXISTE, POIS OS AUTOVALORES SÃO RAÍZES DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DA MATRIZ ASSOCIADA A T EM ALGUMA BASE. LEMBRAMOS QUE TODO POLINÔMIO DE GRAU ≥ 1 TEM UMA RAÍZ COMPLEXO (AQUI PRECISAMOS QUE V SEJA COMPLEXO).

SEJA $W = [v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$. LOGO $V = W \oplus W^\perp$. COMO $T: W^\perp \rightarrow W^\perp$ PELO LEMA 2, CONCLUÍMOS QUE T É UM OPERADOR NORMAL EM $W^\perp$.

COMO $\dim W = \dim V - 1 = n+1 - 1 = n$, PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO EXISTE UMA BASE ORTONORMAL $\mathcal{B}_w = \{e_1, \dots, e_n\}$ DE W TAL QUE $Te_j = \lambda_j e_j$.

ASSIM, UMA BASE ORTONORMAL DE V FORMADA DE AUTOVETORES DE T É DADA POR $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, \frac{v}{\|v\|}\}$ ■

COROLÁRIO: SE $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ É AUTOADJUNTA OU UNITÁRIA, ENTÃO $\exists$ UMA MATRIZ UNITÁRIA $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ TAL QUE $U^*AU = D$, EM QUE D É DIAGONAL.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE MATRIZES AUTOADJUNTAS OU UNITÁRIAS SÃO NORMAIS. ■

COROLÁRIO: SE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É SIMÉTRICA, ENTÃO $\exists$ UMA MATRIZ ORTOGONAL $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ TAL QUE $P^TAP = D$, EM QUE D É DIAGONAL.

OBS: LEMBRAMOS QUE AUTOADJUNTA REAL = SIMÉTRICA REAL
UNITÁRIA REAL = ORTOGONAL REAL

DEMO: SABEMOS QUE $\exists$ UMA BASE ORTONORMAL $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ DE $\mathbb{C}^n$ TAL QUE $Ae_j = \lambda_j e_j, j \in \mathbb{R}$.

VIMOS QUE SE $e_j = \pi_j + i s_j, \pi_j, s_j \in \mathbb{R}^n$, ENTÃO $T\pi_j = \lambda_j \pi_j$ E $Ts_j = \lambda_j s_j$.

SEJA $\mathcal{C} = \{\pi_1, \dots, \pi_n, s_1, \dots, s_n\}$. LOGO $[\mathcal{C}] = \mathbb{R}^{2n}$. DE FATO, SE $v \in \mathbb{R}^{2n}$, ENTÃO $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ TAL QUE

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = (\operatorname{Re} \alpha_1 \pi_1 - \operatorname{Im} \alpha_1 s_1) + i(\operatorname{Re} \alpha_1 s_1 + \operatorname{Im} \alpha_1 \pi_1) + \dots + (\operatorname{Re} \alpha_n \pi_n - \operatorname{Im} \alpha_n s_n) + i(\operatorname{Re} \alpha_n s_n + \operatorname{Im} \alpha_n \pi_n)$$

$$\hookrightarrow \alpha e = (\operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha)(\pi + i s) = (\operatorname{Re} \alpha \pi - \operatorname{Im} \alpha s) + i(\operatorname{Re} \alpha s + \operatorname{Im} \alpha \pi)$$

COMO v É REAL, CONCLUÍMOS QUE $v = \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} \alpha_j \pi_j - \operatorname{Im} \alpha_j s_j)$

COMO $[\mathcal{C}] = \mathbb{R}^{2n}$, PODEMOS RETIRAR OS VETORES EM EXCESSO E OBTER UMA BASE

$B = \{f_1, \dots, f_n\}$, EM QUE CADA f_j É UM π OU UM s .

SE $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, S ão n , SÃO OS AUTOVALORES DISTINTOS DE T , ENTÃO TEMOS QUE $B = B_1 \cup \dots \cup B_s$, EM QUE $B_j = \{f \in B, Tf = \lambda_j f\}$.

APLICANDO GRAM-SCHMIDT EM CADA B_j , OBTÉMOS $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$, EM QUE $[\mathcal{Q}_j] = [B_j]$, $\mathcal{Q}_j$ É CONJUNTO ORTONORMAL E $Tf = \lambda_j f, \forall f \in \mathcal{Q}_j$.

COMO AUTOVETORES ASSOCIADOS A AUTOVALORES DISTINTOS SÃO ORTOGONAIS, CONCLUÍMOS QUE $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_s$ É ORTONORMAL E $[\mathcal{Q}] = \mathbb{R}^{2n}$. LOGO $\mathcal{Q}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $\mathbb{R}^{2n}$ FORMADA POR AUTOVETORES REAIS DE T . A MATRIZ $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É A MATRIZ CUJAS COLUNAS SÃO OS ELE-

MENTOS DE D . (É ORTOGONAL, PORTANTO).

EXEMPLO 1 ACHE $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ORTOGONAL TAL QUE $P^T A P$ É DIAGONAL, QUANDO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO: 1) DETERMINAMOS $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 4]$

2) AS RAÍZES DE p_A SÃO $(-1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 4] = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ OU

$$(1-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2$$

OS AUTOVALORES SÃO -1 E 3 .

$$\text{Logo } \lambda = -1 \text{ OU } \lambda = 3.$$

3) DETERMINAMOS UMA BASE DE AUTOVETORES.

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 - L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 = \frac{1}{2} L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \uparrow$
PÍVO
VARIÁVEIS
LIVRES

$$x^{(2)} = (a, 1, 0) \quad (A - \lambda I)x^{(2)} = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0$$

$$\text{Logo } x^{(2)} = (1, 1, 0)$$

$$x^{(3)} = (a, 0, 1) \quad (A - \lambda I)x^{(3)} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\text{Logo } x^{(3)} = (0, 0, 1)$$

$$\lambda = 3$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 = -\frac{1}{2}L_1, L_2 = -\frac{1}{4}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PIVÔS

VARIÁVEL LIVRE

$$x^{(2)} = (a, 1, b) \quad (A - \lambda I)x^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} a + 1 &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } x^{(2)} = (-1, 1, 0)$$

UMA BASE DE AUTOVETORES É $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$.

UMA BASE ORTONORMAL DE AUTOVETORES É $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$.

$$\text{Assim, } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ É TAL QUE } P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORES

$\uparrow$
 -1 $\uparrow$ -1 $\uparrow$
 3

EXEMPLO 2: VIMOS QUE $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ É TAL QUE $U^T A U = D$, COM $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

E $D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. PODERÍAMOS TER USADO UMA MATRIZ REAL U ?

SOLUÇÃO: NÃO! LEMBRAMOS QUE AS COLUNAS DE U SÃO AUTOVETORES DE A .

SE $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ É AUTOVETOR DE A , ENTÃO $Av = i v$ OU $Av = -i v$, POIS $\pm i$ SÃO OS AUTOVALORES DE A . Logo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= \pm i x \neq \text{Se } x \neq 0, \text{ ENTÃO } y \notin \mathbb{R}. \text{ Logo } x = 0 \text{ e } y = 0. \text{ ABSURDO, POIS } v \in \mathbb{R}^2 \\ x &= \pm i y \end{aligned}$$

AUTOVETOR

FORMA DE JORDAN

SEJA $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. E SE A NÃO FOR DIAGONALIZÁVEL? SEMPRE TEMOS A FORMA DE JORDAN!

SEJAM $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{C}^n$ UM CONJUNTO DE AUTOVETORES L.I. DE A COM O MAIOR NÚMERO POSSÍVEL DE ELEMENTOS. LOGO SE $Av_j = \lambda_j v_j$ ($\lambda_j \in \mathbb{C}$ NÃO PRECISAM SER DISTINTOS), ENTÃO $\exists$ BLOCOS $J_1, \dots, J_s$ DA SEGUINTE FORMA

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad \text{E UMA MATRIZ INVERSÍVEL } P \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \text{ TAL QUE}$$
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{bmatrix}$$

OS BLOCOS SÃO UNICAMENTE DETERMINADOS POR P .

SE A É DIAGONALIZÁVEL, ENTÃO $J_j = [\lambda_j], v_j$.

EXEMPLO 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ É TAL QUE $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$. OS AUTOVALORES SÃO APENAS $\lambda = 1$.

$(A - 1I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0$. Logo $\lambda(1, 0)$, $\lambda \neq 0$ SÃO OS AUTOVETORES. A FORMA DE JORDAN É $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

NOTE QUE $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ É TAL QUE $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$. OS AUTOVALORES SÃO APENAS $\lambda=1$.

$(A - I) \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{:= \vec{v}}{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 0$. Logo $\lambda(0,1)$, $\lambda \neq 0$, SÃO OS AUTOVECTORES. A FORMA DE JORDAN É $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.