LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e das notas de João Barata[1]. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Folland e (B. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X das notas de J. Barata.

1. Exercícios para achar a função de Green para problemas de valor inicial

Exercício 1. Este exercício pode ser útil para determinar as soluções dos problemas abaixo:

Seja dada a equação $\frac{d^m u}{dx^m}(x) + a_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}(x) + ... + a_0 u(x) = 0$.

a) Mostre que $e^{\lambda x}$ é solução da equação acima se λ é raiz de $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0 = 0$.

b) Mostre que, para a equação $\frac{d^2u}{dx^2}(x) + a_1\frac{du}{dx}(x) + a_0 u(x) = 0$, se $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ tem apenas uma raiz λ_0, isto é, $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_0)^2$, então $e^{\lambda_0 t}$ e $te^{\lambda_0 t}$ são soluções do problema.

Exercício 2. (F. 10.1, ex.2.1) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + 4u' + 4u = f \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercício 3. (F. 10.1, ex.2.2) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + 9u' + 20u = f \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercício 4. (F. 10.1, ex.2.3) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercício 5. (F. 10.1, ex.2.4) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} x^2u'' + 4xu' + 2u = f \\ u(1) = u'(1) = 0 \end{cases},$$

para $x > 0$.

2. Exercícios para achar a função de Green para problemas de Contorno

Exercício 6. (B. 18, ex.18.1, 18.2, 18.3) Verifique que o problema:

a) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$ com $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 1$ não tem solução.

b) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$ com $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 0$ tem infinita soluções.

c) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = 0$ com $u(0) = a$ e $u(\pi) = b$ tem infinitas soluções se $a = -b$ e não tem solução se $a \neq -b$.

Exercício 7. (B. 18, ex.18.22) Determine explicitamente a função de Green para os seguintes problemas:

a) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$, com $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$.

b) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$, com $u(0) = 0$ e $u'(1) = 0$.

c) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$, com $u(0) = 0$ e $u(1) + u'(1) = 0$.

d) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = f(x)$, com $u(0) = 0$ e $u'(1) = 0$.

e) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right) = f(x)$, com $u(1) = 0$ e $u(e) = 0$.

Exercício 8. (B. 18, ex.18.23) Determine explicitamente a solução dos cinco problemas acima no caso em que $f(x) = x$.

Exercício 9. (B. 18, ex.18.20) Determine a função de Green para o seguinte problema de Sturm: $u''(x) = f(x)$, com $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$, $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, com $x \in [a, b]$, $a < b$. (Suponha que α_1, α_2, β_1 e β_2 são valores que permitam a construção de funções de Green)

[1]http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap18.pdf

Exercício 10. (F. 10.1, ex.2.5) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} x^2u'' - 2xu' + 2u = f \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases} .$$

Exercício 11. (F. 10.1, ex.2.6) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u(0) = u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} ,$$

em que $\mu \neq 1, 3, 5, ...$

Exercício 12. (F. 10.1, ex.2.7) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u(0) = 0 \,\mathrm{e}\, u'(1) = -u'(1) \end{cases} ,$$

em que $\tan(\mu) + \mu \neq 0$.

3. Exercícios para achar a função de Green para problemas de Contorno com condições no Infinito.

Exercício 13. (F. 10.1, ex.2.9) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u(0) = u(\infty) = 0 \end{cases} ,$$

em que $Im(\mu) > 0$.

Exercício 14. (F. 10.1, ex.2.10) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u'(0) = u(\infty) = 0 \end{cases} ,$$

em que $Im(\mu) > 0$.

Exercício 15. (F. 10.1, ex.2.11) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + u' - 2u = f \\ u(\pm\infty) = 0 \end{cases} .$$

Exercício 16. (F. 10.1, ex.4) Verifique que

$$u(x) = v_a(x)\int_x^b \frac{v_b(x)f(y)}{p_2(y)W(y)}dy + v_b(x)\int_a^x \frac{v_a(y)f(y)}{p_2(y)W(y)}dy$$

de fato resolve

$$\begin{array}{c} Lu(x) := p_2(x)u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_0(x)u(x) = f(x) \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \,\mathrm{e}\, \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array} ,$$

em que $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$ e $|\beta| + |\beta'| \neq 0$.

As funções v_a e v_b são tais que

$$\begin{array}{c} L(v_a) = 0,\ \alpha v_a(a) + \alpha' v_a'(a) = 0 \\ L(v_b) = 0,\ \beta v_b(b) + \beta' v_b'(b) = 0 \end{array} .$$

4. Exercícios para achar a função de Green para Equações Diferenciais Parciais.

Exercício 17. (F. 10.2, ex.5) Ache a função de Green do problema do calor na forma de uma série de Fourier:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x)\,, \ \ t > 0 \,\mathrm{e}\, x \in]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ \ t > 0 \\ u(0,x) = 0, \ \ x \in]0,l[\end{cases} .$$

Exercício 18. (F. 10.2, ex.8) Ache a função de Green do problema da corda vibrante na forma de uma série de Fourier:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x)\,, \ \ t > 0 \,\mathrm{e}\, x \in]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ \ t > 0 \\ u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \ \ x \in]0,l[\end{cases} .$$

Exercício 19. (F. 10.2, ex.9) Ache a função de Green para o problema de Dirichlet na forma de uma série de Fourier:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in \,]0,1[\, \times \,]0,1[\\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad x \in \,]0,1[\, \text{ e } y \in \,]0,1[\end{array}\right. .$$