Distribuições Bivariadas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2023

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente
desenvolvido pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula)

Sumário

Sumário

Definição

Variável aleatória unidimensional é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

Definição

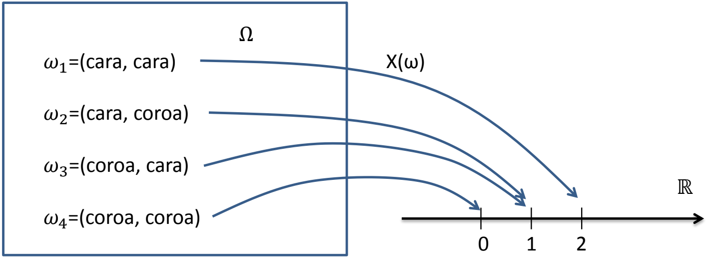
Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for finito ou infinito enumerável.

Exemplos

- nº de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- nº de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos
- nº de pessoas que visitaram um determinado site, num certo período de tempo
- nº de inadimplentes dentre 100 pessoas que pegaram empréstimo no último ano
- nº de dias num mês em que o fechamento de uma determinada ação sobe em relação à abertura
- nº de domicílios com crianças menores de 6 anos

Exemplo 1

Descrição da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Exemplo 1

Função de Probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas equilibradas fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}25$

Variável Aleatória Bidimensional

Definição

Variável aleatória bidimensional é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui valores no $\mathbb{R}^2$ a cada elemento do espaço amostral.

Definição

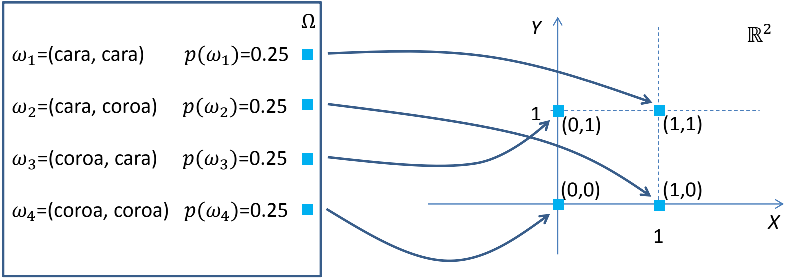
Uma variável aleatória é definida como sendo discreta bidimensional quando o número de valores possíveis que a variável assume no $\mathbb{R}^2$ for finito ou infinito enumerável.

Exemplos

- nº de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda
- nº de carros vendidos dos tipos SEDAN e SUV num dia em uma concessionária
- nº de questões de Física e Química respondidas corretamente por um aluno num exame vestibular
- nº de visitas que cada um dos cônjuges faz ao médico durante um ano
- nº de acidentes numa rodovia nos períodos diurno e noturno

Exemplo 2

Descrição da variável aleatória bidimensional (X,Y): número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda equilibrada



P(X=0,Y=0)=0,25 P(X=0,Y=1)=0,25
P(X=1,Y=0)=0,25 P(X=1,Y=1)=0,25

Sumário

Função de Probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X,Y): número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda pode ser representada na forma abaixo

$X\backslash Y$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

em que $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, para $i,j = 0,1$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$
- $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$

Exemplo 2

Função de Probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X,Y): número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda, supondo que a moeda é equilibrada, fica dada por

$X \backslash Y$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Função de Probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X,Y) pode ser representada pela tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_s
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1s}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2s}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\ldots$	p_{rs}

em que $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, s$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$
- $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Exemplo 3

Vamos considerar novamente o experimento de lançamento de duas moedas e as variáveis aleatórias X e Y denotando, respectivamente, o número de caras no primeiro e segundo lançamentos. Segue abaixo a distribuição conjunta de duas novas variáveis $U = X - Y$ e $W = X + Y$.

X \ Y	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

U \ W	0	1	2
-1		0,25	
0	0,25		0,25
1		0,25	

Exemplo 3

Função de Probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (U,W) fica dada por

$U \backslash W$	0	1	2
-1	0	$0{,}25$	0
0	$0{,}25$	0	$0{,}25$
1	0	$0{,}25$	0

Sumário

Exemplo 2

As funções de probabilidade marginais de X e Y podem ser obtidas através da tabela abaixo

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	$0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}50$
1	$0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}50$
$p(y)$	$0{,}50$	$0{,}50$	1

em que $p(x) = P(X = x)$ e $p(y) = P(Y = y)$.

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	$0{,}50$	$0{,}50$

com $\mathrm{E}(X) = 0{,}50$ e $\mathrm{Var}(X) = 0{,}50 \times 0{,}50 = 0{,}25$.

y	0	1
$P(Y = y)$	$0{,}50$	$0{,}50$

com $\mathrm{E}(Y) = 0{,}50$ e $\mathrm{Var}(Y) = 0{,}50 \times 0{,}50 = 0{,}25$.

Exemplo 3

De forma similar podemos obter as funções de probabilidade marginais de U e W conforme a tabela abaixo

$U \backslash W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	$0{,}25$	0	$0{,}25$
0	$0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}50$
1	0	$0{,}25$	0	$0{,}25$
$p(w)$	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}25$	1

em que $p(u) = P(U = u)$ e $p(w) = P(W = w)$.

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

u	-1	0	1
$P(U = u)$	0,25	0,50	0,25

com $\mathsf{E}(U) = -1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}50 + 1 \times 0{,}25 = 0$ e $\mathsf{Var}(U) = 0{,}50$.

w	0	1	2
$P(W = w)$	0,25	0,50	0,25

com $\mathsf{E}(W) = 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}50 + 2 \times 0{,}25 = 1$ e $\mathsf{Var}(W) = 0{,}50$.

Distribuição Marginal

De uma forma geral as funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\ldots$	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\ldots$	$p_{\cdot s}$	1

em que

- $p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$ para $i = 1, \ldots, r$
- $p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$ para $j = 1, \ldots, s$

Sumário

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), \; P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\dots$	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot s}$	1

Dizemos que as variáveis X e Y são independentes se

$$\begin{aligned} P(X = x_i, Y = y_j) &= P(X = x_i)P(Y = y_j) \\ p_{ij} &= p_{i\cdot}p_{\cdot j} \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$.

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Temos que para todas as caselas da tabela

$$0{,}25 = 0{,}50 \times 0{,}50.$$

Assim, podemos dizer que X e Y são independentes. Isto é, o número de caras no 2º lançamento independe do número de caras no 1º lançamento.

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

$U\backslash W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	$0{,}25$	0	$0{,}25$
0	$0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}50$
1	0	$0{,}25$	0	$0{,}25$
$p(w)$	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}25$	1

Em particular para a casela na posição (2,1) temos que

$$0{,}25 \neq 0{,}25 \times 0{,}50.$$

Portanto, as variáveis U e W não são independentes.

Sumário

Exemplo 3

Qual a distribuição condicional de U dado $W = 1$?

$U \backslash W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Temos que

$$P(U = u \mid W = 1) = \frac{P(U = u, W = 1)}{P(W = 1)}.$$

Exemplo 3

$U \backslash W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$

u	-1	0	1
$P(U = u \mid W = 1)$	$\frac{0{,}25}{0{,}50} = \frac{1}{2}$	$\frac{0}{0{,}50} = 0$	$\frac{0{,}25}{0{,}50} = \frac{1}{2}$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u \mid W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(U \mid W = 1) &= -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 0 \\
\mathsf{E}(U^2 \mid W = 1) &= (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times 0 + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1 \\
\mathsf{Var}(U \mid W = 1) &= \mathsf{E}(U^2 \mid W = 1) - [\mathsf{E}(U \mid W = 1)]^2 \\
&= 1 - 0^2 = 1
\end{aligned}
$$

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$\mathsf{E}(X \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{r} x_i P(X = x_i \mid Y = y)$$

Variância condicional

A variância condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$\mathsf{Var}(X \mid Y = y) = \mathsf{E}(X^2 \mid Y = y) - [\mathsf{E}(X \mid Y = y)]^2$$

$$\mathsf{E}(X^2 \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 P(X = x_i \mid Y = y)$$

Sumário

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\dots$	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot s}$	1

$$\begin{aligned}\textsf{Cov}(X,Y) &= \textsf{E}[(X-\textsf{E}(X))(Y-\textsf{E}(Y))] \\ &= \textsf{E}(XY)-\textsf{E}(X)\textsf{E}(Y)\end{aligned}$$

$$\textsf{E}(XY)=\sum_{ij} x_i y_j p_{ij} \qquad \textsf{E}(X)=\sum_i x_i p_{i\cdot} \qquad \textsf{E}(Y)=\sum_j y_j p_{\cdot j}$$

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2 \qquad \text{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 p_{i.}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{E}(Y^2) - [\text{E}(Y)]^2 \qquad \text{E}(Y^2) = \sum_j y_j^2 p_{.j}$$

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
- $\rho(X,Y) = 1$ se e somente se há constantes $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
- $\rho(X,Y) = -1$ se e somente se há constantes $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Independência

Se X e Y são independentes então $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ e portanto $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ e $\rho(X,Y) = 0$.

A recíproca não necessariamente é verdadeira.

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e varianças finitas. Então

- E$(X \pm Y)$ = E(X) $\pm$ E(Y)
- Var$(X \pm Y)$ = Var(X) + Var(Y) $\pm$ 2Cov(X,Y)

Independência

Se X e Y são independentes então Cov$(X,Y) = 0$ e portanto Var$(X \pm Y)$ = Var(X) + Var(Y).

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(XY) &= 0 \times 0 \times 0{,}25 + 0 \times 1 \times 0{,}25 + \\ &\quad 1 \times 0 \times 0{,}25 + 1 \times 1 \times 0{,}25 \\ &= 0{,}25. \end{aligned}$$

Temos ainda que $\mathsf{E}(X) = 0{,}50$, $\mathsf{Var}(X) = 0{,}25$, $\mathsf{E}(Y) = 0{,}50$ e $\mathsf{Var}(Y) = 0{,}25$.

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)}\sqrt{\mathsf{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0{,}25 - 0{,}50 \times 0{,}50}{\sqrt{0{,}25}\sqrt{0{,}25}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lembrando que X e Y são independentes.

Exemplo 3

$U \backslash W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(UW) &= -1 \times 0 \times 0 + -1 \times 1 \times 0{,}25 + -1 \times 2 \times 0 + \\ &\quad 0 \times 0 \times 0{,}25 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 0{,}25 + \\ &\quad 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times 0{,}25 + 1 \times 2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Temos ainda que $\mathrm{E}(U) = 0$, $\mathrm{Var}(U) = 0{,}50$, $\mathrm{E}(W) = 1$ e $\mathrm{Var}(W) = 0{,}50$.

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(U,W) &= \frac{\mathsf{E}(UW) - \mathsf{E}(U)\mathsf{E}(W)}{\sqrt{\mathsf{Var}(U)}\sqrt{\mathsf{Var}(W)}} \\ &= \frac{0 - 0 \times 1}{\sqrt{0{,}50}\sqrt{0{,}50}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Note que U e W não são independentes.

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X,Y) por uma loja num determinado dia

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= 0 \times 0 \times 0{,}05 + 0 \times 1 \times 0{,}10 + \\ & 0 \times 2 \times 0{,}25 + 0 \times 3 \times 0{,}05 + \\ & 1 \times 0 \times 0{,}05 + 1 \times 1 \times 0{,}30 + \\ & 1 \times 2 \times 0{,}10 + 1 \times 3 \times 0{,}10 \\ &= 0{,}80. \end{aligned}$$

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X=x)$	$0{,}45$	$0{,}55$

com $\text{E}(X) = 0{,}55$ e $\text{Var}(X) = 0{,}55 \times 0{,}45 = 0{,}2475$.

y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$0{,}10$	$0{,}40$	$0{,}35$	$0{,}15$

com $\text{E}(Y) = 1{,}55$ e $\text{Var}(Y) = 0{,}7475$.

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)}\sqrt{\mathsf{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0{,}80 - 0{,}55 \times 1{,}55}{\sqrt{0{,}2475}\sqrt{0{,}7475}} \\ &= -0{,}122.\end{aligned}$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Exemplo 5

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de questões de Física (X) e de Química (Y) respondidas corretamente num exame vestibular

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,10	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,10	0,00
2	0,00	0,10	0,10	0,05
3	0,00	0,05	0,05	0,05

Qual a probabilidade de um candidato acertar pelo menos duas questões de cada tópico? E de acertar no máximo uma questão de cada tópico?

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

com $\text{E}(X) = 1{,}35$ e $\text{Var}(X) = 2{,}75 - (1{,}35)^2 = 0{,}9275$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,25	0,10

com $\text{E}(Y) = 1{,}20$ e $\text{Var}(Y) = 2{,}30 - (1{,}20)^2 = 0{,}86$.

Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(XY) &= 1 \times 1 \times 0{,}15 + 1 \times 2 \times 0{,}10 + \\
&\quad 2 \times 1 \times 0{,}10 + 2 \times 2 \times 0{,}10 + \\
&\quad 2 \times 3 \times 0{,}05 + 3 \times 1 \times 0{,}05 + \\
&\quad 3 \times 2 \times 0{,}05 + 3 \times 3 \times 0{,}05 \\
&= 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}15 + \\
&\quad 0{,}30 + 0,45 = 2{,}15.
\end{aligned}
$$

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \\ &= \frac{2{,}15 - 1{,}35 \times 1{,}20}{\sqrt{0{,}9275}\sqrt{0{,}86}} \\ &= \frac{0{,}53}{0{,}8931} = 0{,}59.\end{aligned}$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Interprete $X + Y$ e calcule $\mathrm{E}(X + Y)$ e $\mathrm{Var}(X + Y)$.