A integral de Riemann e Aplicações
Aula 30

Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Primeiro Semestre de 2023

O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 1)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então, a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é diferenciável em $[a, b]$ e $g'(x) = f(x)$.

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 2)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e G é uma primitiva qualquer de f, então

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Substituição para Integrais Definidas

Se f e g' forem contínuas em $[a, b]$ e $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

Prova: Seja F uma primitiva de f. Então, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$ e do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Aplicando mais uma vez o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)). \square$$

Podemos calcular uma integral definida por substituição calculando primeiro a integral indefinida e usando o Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo,

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(5)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2}$$
$$= \frac{2}{3}((5)^{3/2} - 1).$$

Ou mudando os limites de integração ao se mudar a variável.

Exemplo

Calcule $\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\, dx.$

Fazendo $u = 2x - 1$, temos $du = 2\,dx$ ou $\frac{1}{2}\,du = dx$ Quando $x = \dfrac{1}{2}$, $u = 0$; quando $x = 1$, $u = 1$. Assim,

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\, dx = \int_{0}^{1} \sqrt{u}\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Integração por partes para integrais definidas

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.}$$

Example

Calcule $\displaystyle\int_1^t x\ln(x)\,dx$.

$$\int_1^t \underbrace{x}_{g'}\underbrace{\ln(x)}_{f}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g}\underbrace{\ln(x)}_{f}\Big|_1^t - \int_1^t \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g}\,dx = \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{2}\int_1^t x\,dx$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^t = \frac{t^2}{2}\ln(t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}.$$

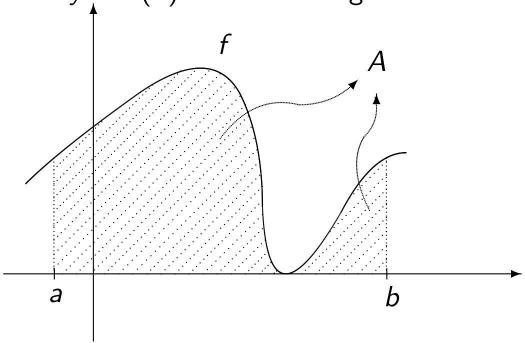
Cálculo de áreas

Queremos determinar a área de diferentes regiões. Começaremos pelo problema de achar a área de uma região A que está sob a curva de uma função.

Caso 1: Seja f contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Queremos calcular a área do conjunto A do plano limitado pelas retas

$$x = a \qquad x = b \qquad y = 0$$

e pelo gráfico de $y = f(x)$ conforme a figura abaixo.



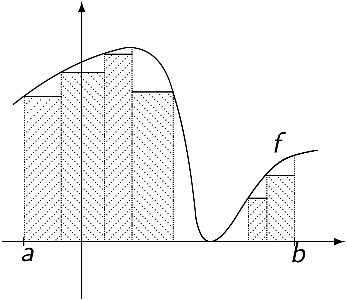
Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i{}'$ e $c_i{}''$ tais que

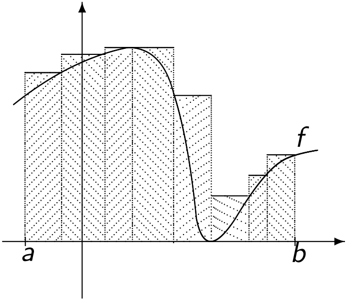
$$\begin{aligned} f(c_i{}') &= \min\{f(x);\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\} \\ f(c_i{}'') &= \max\{f(x);\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\}. \end{aligned}$$

Então, as somas de Riemann correspondentes satisfazem temos

$$\sum_i f(c_i{}')\Delta x_i \leq A \leq \sum_i f(c_i{}'')\Delta x_i\,,$$

conforme ilustra a figura seguinte.


f
a
b


f
a
b

Isto significa que a soma de Riemann $\sum_i f(c_i{}')\Delta x_i$ se aproxima da área A por "falta" e a soma de Riemann $\sum_i f(c_i{}'')\Delta x_i$ se aproxima da área A por "sobra".
Daí, fazendo $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \longrightarrow 0$ temos

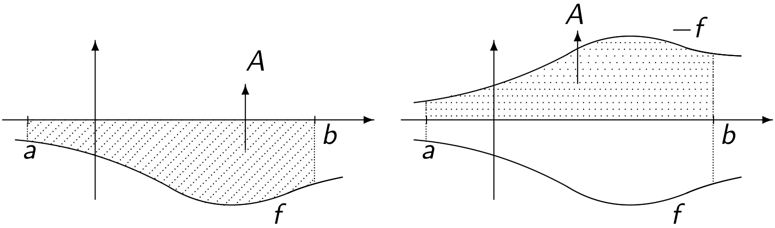
$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} \sum_i f(c_i{}')\Delta x_i & \leq & \displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} A & \leq & \displaystyle\lim_{\|P\| \to 0} \sum_i f(c_i{}'')\Delta x_i \\ \| & & \| & & \| \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx & & A & & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array}$$

ou seja, $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemplo

A área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$ é $\frac{1}{3}$.

Caso 2: Seja A o conjunto hachurado conforme mostra a figura.



Logo

$$\text{área } A = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|\, dx\ .$$

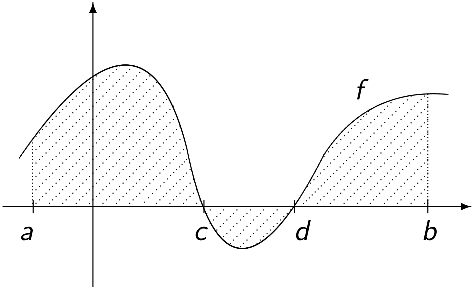
Observe que como $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$ temos

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Exemplo

A área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, pelo eixo x, e pelo gráfico de $f(x) = x^4 - x$ é $\dfrac{3}{10}$.

Caso 3: Seja A o conjunto hachurado conforme a figura abaixo.



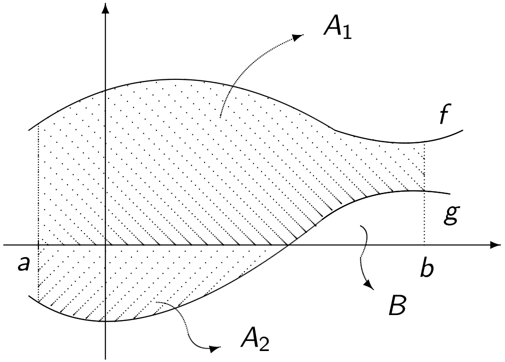
Então

$$\text{área } A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|\, dx\ .$$

Exemplo

A área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = -1$, $x = 1$ *e pelo gráfico de* $f(x) = x^3$ *é* $\frac{1}{2}$.

Caso 4: Considere A o conjunto hachurado da figura seguinte.



Então A é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos das funções f e g, onde $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Segue que

$$\text{área } A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Observação: No Caso 4 acima temos

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + B\,;$$

$$\int_a^b g(x) = B - A_2.$$

Portanto

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx = A_1 + A_2\ .$$

Em geral, a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx.$$

Exemplo

Calcule a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x.

1. $f(x) = x - x^3$, $x \in [0, 2]$,
2. $f(x) = x$, $x \in [0, 3]$,
3. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0, \pi]$.

Exemplo

Calcule a área do conjunto $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\; x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$.

Temos que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 1$. Portanto

$$\text{área}\, A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

Exemplo

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ *e* $y = x^2$, *com* $0 \leq x \leq 2$.

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ interceptam-se nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Então,

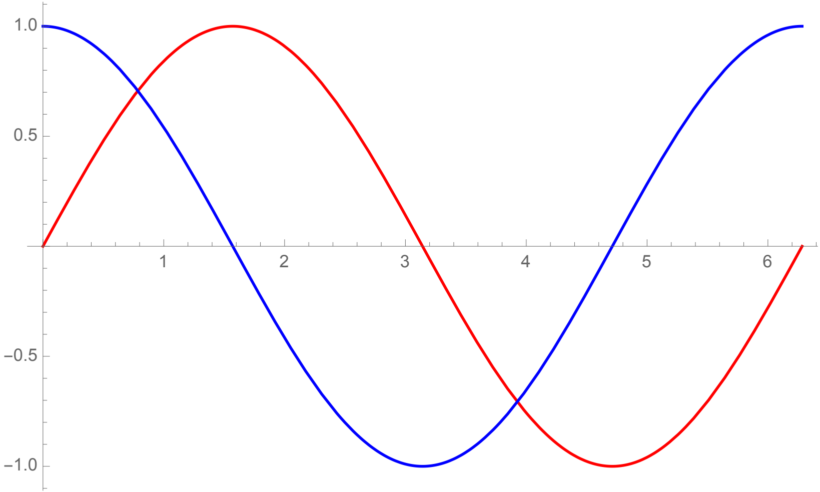
$$\text{área} = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = 1.$$

Exemplo

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

As curvas $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ interceptam-se nos pontos $x = \pi/4$ e $x = 5\pi/4$. Então,

$$\text{área} = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))dx = 4\sqrt{2}.$$


1.0
0.5
−0.5
−1.0
1
2
3
4
5
6