Exercícios – Escoamento Potencial

2ª Questão da P3 (Mecânica 2017)

2ª Questão da P3 (Mecânica 2016)

Problema C8.4 White

1ª Questão da P3 (Naval 2015)

Problema P8.50 White

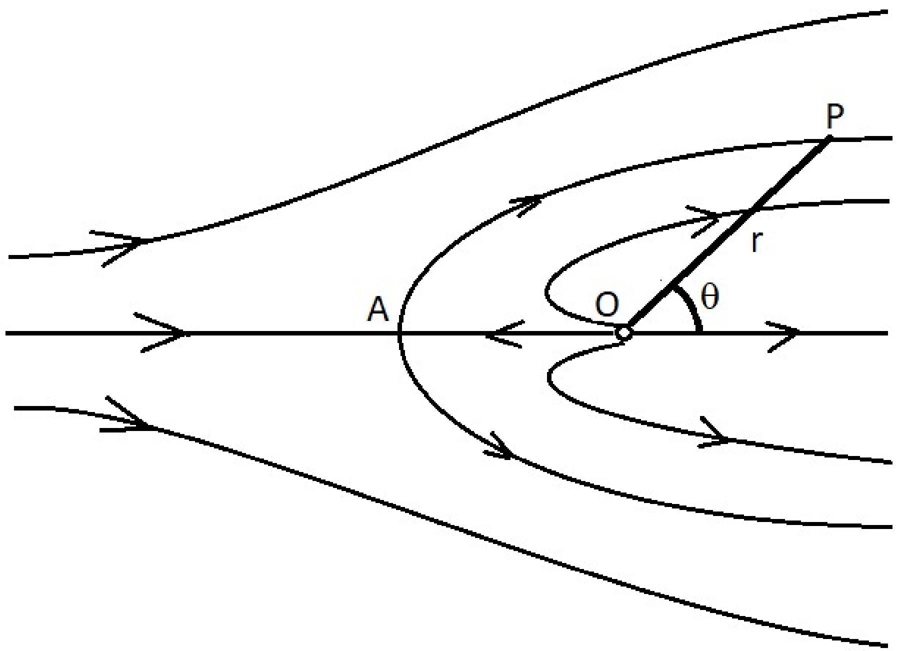
Problema Complementar

2ª Questão (P3 2017 Mecânica): Uma descarga de água contaminada num rio é representada por uma fonte de intensidade q no ponto O combinada com uma corrente de velocidade uniforme U, formando a região contaminada delimitada pela linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação A. Seja P um ponto qualquer sobre essa linha de corrente. Se chamarmos de Δ à distância entre A e O, pedem-se:

a)Calcule Δ em função de q e U.

b)Mostre que as coordenadas r e θ do ponto P são dadas por

$$r = \frac{q}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{sen\,\theta}$$



Dados: $\psi_{corrente} = U\, r\, sen\,\theta$; $\psi_{fonte} = \dfrac{q\theta}{2\pi}$

$\upsilon_r = \dfrac{\partial\psi}{r\partial\theta}$; $\upsilon_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$

Solução:

a)A função de corrente resultante da superposição de corrente uniforme com fonte é:

$$\boxed{\psi = U\, r\, sen\,\theta + \frac{q\theta}{2\pi}}$$

As velocidades resultam:

$$\upsilon_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos\theta + \frac{q}{2\pi r} \qquad \upsilon_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U\, sen\,\theta$$

No ponto de estagnação temos $r = \Delta$, $\theta = \pi$ e ambas as componentes da velocidade tem que ser nulas. Como sen $\pi = 0$, a velocidade υ_θ é nula. Da velocidade υ_r:

$$U\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \frac{q}{2\pi\Delta} = 0$$

Isso resulta:

$$\boxed{\Delta = \frac{q}{2\pi U}}$$

b)Da expressão da função de corrente, como no ponto de estagnação temos $r = \Delta$, $\theta = \pi$ resulta para a linha de corrente que passa por esse ponto:

$$\psi = U\Delta \underbrace{sen\,\pi}_{0} + \frac{q\pi}{2\pi}$$

Assim:

$\boxed{\psi = \frac{q}{2}}$ é a linha de corrente passando pelo ponto de estagnação.

Porém, para um ponto P qualquer sobre essa linha de corrente:

$$\frac{q}{2} = U\, r\, sen\,\theta + \frac{q\,\theta}{2\pi}$$

Que resulta:

$$U\, r\, sen\,\theta = \frac{q}{2}\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)$$

E isso vai resultar:

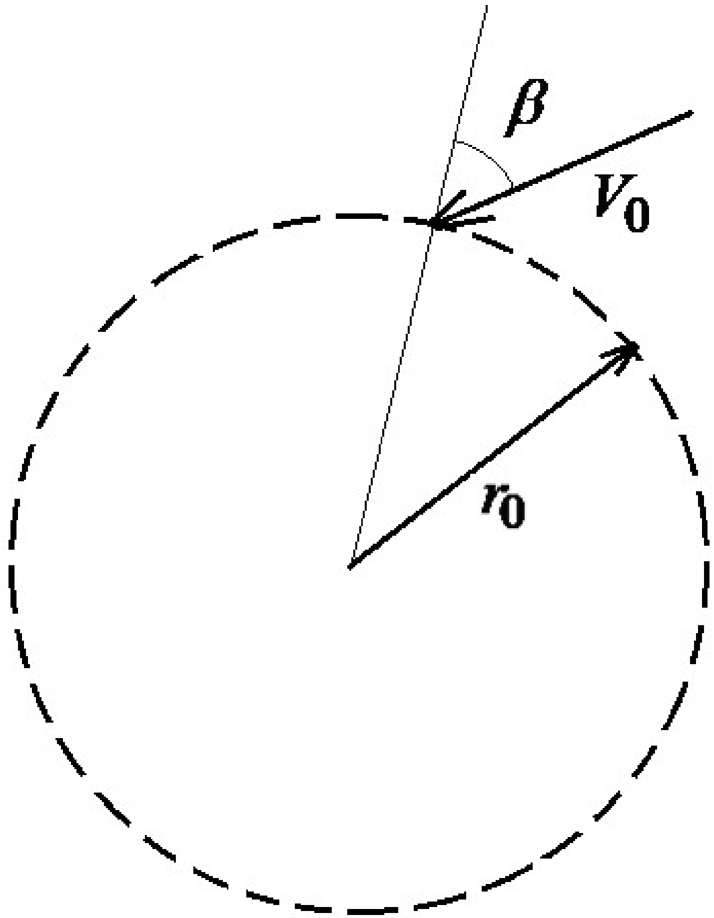
$$\boxed{r = \frac{q}{2\pi\, U}\,\frac{\pi - \theta}{sen\,\theta}}$$

2ª Questão (P3 Mecânica 2016) Um tornado pode ser idealizado como um sistema de vórtice potencial e sumidouro com um núcleo rotacional de raio r_0 que se comporta como um corpo sólido ($\upsilon_\theta = \omega r$), onde ω é a velocidade angular. Para $r \geq r_0$, a velocidade é aquela induzida pelo sistema vórtice-sumidouro. Admitindo-se que o raio do núcleo do tornado é $r_0 = 20\,m$ e que o módulo da velocidade do vento para esse raio é $V_0 = 180\,km/h$, com essa velocidade fazendo um ângulo $\beta = 60^o$ com a direção radial e supondo $\rho = 1{,}20\,kg/m^3$, pede-se determinar:

a) A circulação Γ do vórtice e a vazão por unidade de comprimento q do sumidouro**;**

b) A velocidade angular ω do núcleo;

c) A pressão manométrica em torno do núcleo ($r = r_0$).



β
V_0
r_0

Solução

A superposição do sumidouro com o vórtice resulta um campo de velocidades dado por:

$$\upsilon_r = \frac{q}{2\pi r} \qquad \upsilon_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Em $r = r_0 = 20$ m, as velocidades são:

$$\upsilon_r = -\frac{180000}{3600}\cos 60^{o} = -25 m/s$$

$$\upsilon_\theta = \frac{180000}{3600} sen\, 60^{o} = 43{,}3 m/s$$

Assim, temos:

$$\boxed{q = -\,25 \times 2 \times \pi \times 20 = -\,3141{,}6\,\mathrm{m^2/s}}$$

$$\boxed{\Gamma = 43{,}3 \times 2 \times \pi \times 20 = 5441{,}3\,\mathrm{m^2/s}}$$

A velocidade angular no núcleo será:

$$\boxed{\omega = \frac{43{,}3}{20} = 2{,}165\,\mathrm{rad/s}}$$

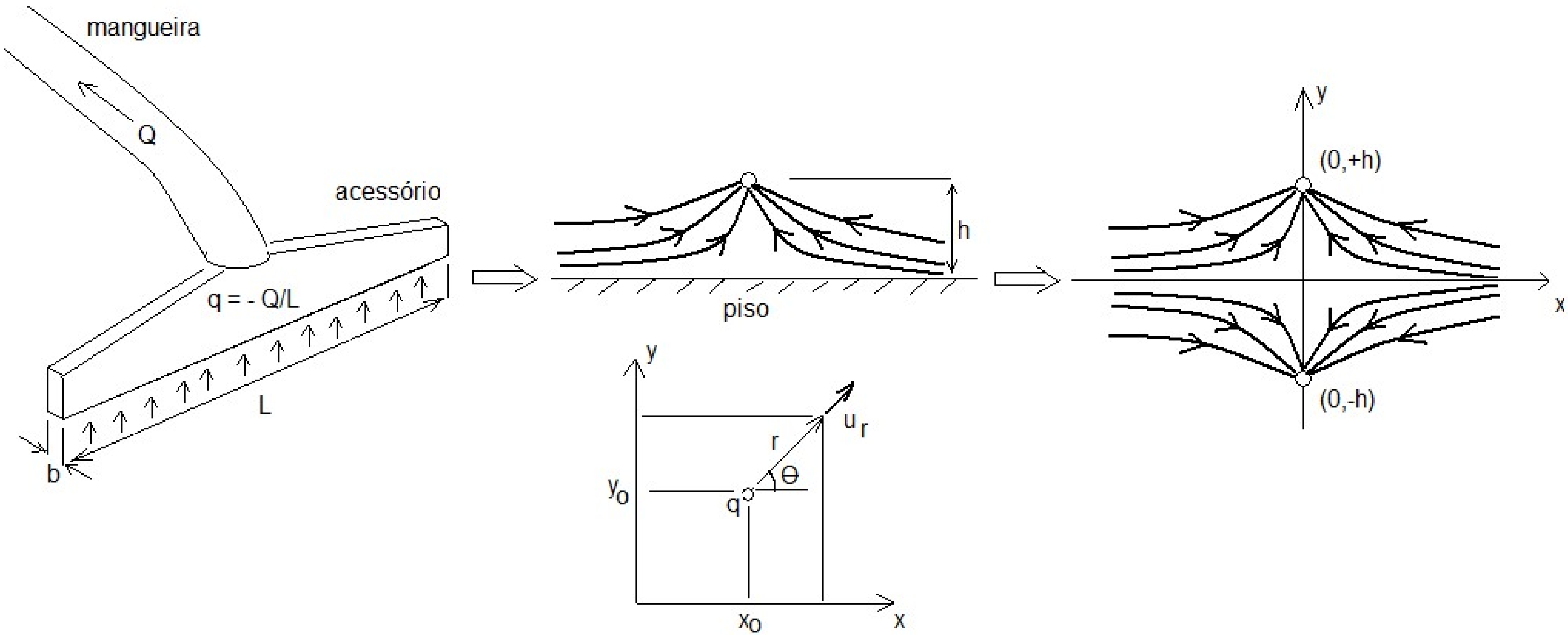
Se a pressão ao longe, com ar parado, for a pressão atmosférica, usando a equação de Bernoulli a pressão efetiva (manométrica) em $r = r_0$ será:

$$\frac{\rho V_0^2}{2} + p = 0 \;\Rightarrow\; p = -\frac{\rho V_0^2}{2}$$

Logo:

$$\boxed{p = -\frac{1{,}2 \times \left(\dfrac{180000}{3600}\right)^2}{2} = -1500\,\mathrm{Pa}}$$

C8.4)Um acessório de um aspirador de pó doméstico é constituído de um bocal convergente com uma fresta de aspiração de comprimento L e largura b. Podemos representar o escoamento causado pelo acessório através de um sumidouro de intensidade $q = - Q/L$ colocado a uma distância h do piso. Para representar o efeito do piso, o escoamento acaba sendo representado por dois sumidouros, um na posição $x=0, y=+h$ e o outro na posição $x=0,\ y=-h$.


mangueira
Q
acessório
q = - Q/L
L
b
h
piso
y
(0,+h)
(0,-h)
x
y
u r
r
Θ
yo
q
xo
x

a)Uma fonte ou sumidouro de intensidade q localizada em x_o , y_o provoca num ponto qualquer de coordenadas x , y uma velocidade radial dada por $u_r = \dfrac{q}{2\pi r}$. Verifique que as componentes x e y dessa velocidade são dadas por:

$$u = \frac{q(x - x_o)}{2\pi\left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right]}$$

$$v = \frac{q(y - y_o)}{2\pi\left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right]}.$$

b)Dada a superposição dos dois sumidouros, obtenha as expressões das velocidades u e v para $y=0$ (no piso) em função de q, h e x.

c)Verifique qual a posição x ao longo do piso para a qual temos velocidade máxima em módulo, ou seja, maior eficiência para arrastar partículas, e determine a expressão dessa velocidade máxima em função de q e h. Por que não se deve colocar a fresta do acessório diretamente acima da sujeira que se quer aspirar?

Solução:

a)

$$u = u_r \cos\theta = \frac{q}{2\pi r}\frac{x - x_o}{r} = \frac{q(x - x_o)}{2\pi r^2} = \underline{\underline{\frac{q(x - x_o)}{2\pi\left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right]}}}$$

$$v = u_r\, sen\theta = \frac{q}{2\pi r}\frac{y - y_o}{r} = \frac{q(y - y_o)}{2\pi r^2} = \underline{\underline{\frac{q(y - y_o)}{2\pi\left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right]}}}$$

b)

A superposição dos dois sorvedouros, um em (0, +h) e o outro em (0, -h), resulta, para *u*:

$$u = \frac{q(x-0)}{2\pi\left[(x-0)^2 + (y-(+h))^2\right]} + \frac{q(x-0)}{2\pi\left[(x-0)^2 + (y-(-h))^2\right]}$$

$$u = \frac{q\,x}{2\pi\left[x^2 + (y-h)^2\right]} + \frac{qx}{2\pi\left[x^2 + (y+h)^2\right]}$$

A superposição resulta, para *v*:

$$v = \frac{q\left(y-(+h)\right)}{2\pi\left[(x-0)^2+\left(y-(+h)\right)^2\right]} + \frac{q\left(y-(-h)\right)}{2\pi\left[(x-0)^2+\left(y-(-h)\right)^2\right]}$$

$$v = \frac{q\left(y-h\right)}{2\pi\left[x^2+\left(y-h\right)^2\right]} + \frac{q\left(y+h\right)}{2\pi\left[x^2+\left(y+h\right)^2\right]}$$

Para y=0:

$$u = \frac{q\,x}{\pi\left[x^2 + h^2\right]}; v = 0$$

Assim, verificamos que a superposição dos dois sorvedouros representa realmente a presença do piso, pois tem o efeito de produzir uma velocidade vertical nula na região onde este está presente.

c) Derivando a velocidade u em relação à x para y=0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{\pi\left[x^2 + h^2\right]} - \frac{qx}{\pi\left[x^2 + h^2\right]^2} \times 2x = \frac{q\left(x^2 + h^2\right) - 2qx^2}{\pi\left[x^2 + h^2\right]^2} = \frac{q\left(h^2 - x^2\right)}{\pi\left[x^2 + h^2\right]^2}$$

Igualando a zero, temos que os pontos de velocidade máxima e mínima correspondem à $x = \pm h$. De fato, quando $x=+h$, temos o ponto de velocidade mínima, com $u= q/2\pi h$ (lembre-se que q é negativo), e para $x=-h$ temos a velocidade máxima $u= -q/2\pi h$.

Na realidade, os dois pontos correspondem a pontos de módulo da velocidade máxima, e são os pontos para os quais temos maior eficiência para arrastar a sujeira.

Por outro lado, intuitivamente, colocamos a fenda exatamente sobre a sujeira. É um erro, pois para x=0 temos u=0, ou seja, o módulo da velocidade é mínimo.

Assim, a velocidade máxima em módulo é:

$$\underline{\underline{|u|_{\max} = \frac{|q|}{2\pi h}}}$$

1ª Questão da P3 (Naval 2015): Considere o escoamento potencial ao redor de um cilindro girando. Pergunta-se:

a)Quais as intensidades m do dipolo e Γ de um vórtice ideal para se obter o escoamento potencial ao redor de um cilindro de 3,0 metros de diâmetro imerso numa corrente de ar com velocidade uniforme de 100 m/s, com pontos de estagnação a 45^{o} e 135^{o}?

b)A que rotação Ω em rad/s de um cilindro real equivale a circulação Γ do vórtice?

c)Se o escoamento ao longe possui uma pressão $p_o = 1{,}02 \times 10^5$ N/m^2 e a massa específica $\rho = 1{,}2$ kg/m^3, qual a pressão nos pontos de estagnação?

d)Qual a velocidade e a pressão estática na parede do cilindro em $\theta = 0^o$ e em $\theta = 180^o$?

e)Qual o valor teórico da sustentação por unidade de comprimento (módulo, direção e sentido) que age sobre o cilindro?

Dados:

Movimento Uniforme: $\phi = U_\infty \, r \cos\theta$; $\psi = U_\infty \, r \, sen\theta$

Dipolo: $\phi = \dfrac{m}{r}\cos\theta$; $\psi = -\dfrac{m}{r} sen\theta$

Vórtice Ideal: $\phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$; $\psi = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$

$$\upsilon_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} \qquad \upsilon_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Bernoulli: $\rho\dfrac{U^2}{2} + p = const$

Teorema de Kutta-Joukowsky: $\dfrac{L}{b} = -\rho U_\infty \Gamma$

Solução:

a)A função potencial resultante que representa o escoamento é:

$$\phi = U_{\infty}\, r\cos\theta + \frac{m}{r}\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

As velocidades resultam:

$$\upsilon_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U_{\infty}\cos\theta - \frac{m}{r^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \upsilon_r = \left(U_{\infty} - \frac{m}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\upsilon_{\theta} = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -U_{\infty}\, sen\theta - \frac{m}{r^2}sen\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\theta} = -\left(U_{\infty} + \frac{m}{r^2}\right)sen\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Da expressão da velocidade υ_r percebe-se que o raio do cilindro, ou seja, o lugar geométrico onde a velocidade radial é nula (representando o princípio da impermeabilidade) é dado por:

$$\boxed{r = R = \sqrt{\frac{m}{U_\infty}}}$$

Assim, se a velocidade é U_∞=100 m/s e o raio do cilindro é R=D/2=1,5m, resulta:

$$\boxed{m = U_\infty R^2 = 225\, m^3 / s}$$

Os pontos de estagnação são determinados para ambas as velocidade nulas. Assim, acharemos os pontos de estagnação em $r = R$, o que anula a velocidade υ_r. Para esse raio, a velocidade υ_θ fica:

$$\upsilon_\theta = -2U_\infty sen\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Essa velocidade será nula em:

$$sen\theta = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R}$$

Logo, a intensidade do vórtice, conhecidos os ângulos dos pontos de estagnação, será:

$$\Gamma = 4\pi U_\infty R\, sen\theta$$

Para U_∞=100 m/s, R=1,5m e senθ = sen45º = sen135º = 0,707, temos:

$$\boxed{\Gamma = 1333\, m^2 / s}$$

b)A rotação será dada igualando a velocidade tangencial resultante do movimento do cilindro sólido em r = R com a velocidade induzida pelo vórtice pontual no mesmo raio:

$$\Omega R = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad \Rightarrow \Omega = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \quad \text{logo: } \boxed{\Omega = 94{,}3\ rad/s}$$

c) A pressão nos pontos de estagnação será dada pela equação de Bernoulli:

$$\boxed{p_{estag} = \rho \frac{U_\infty^2}{2} + p_\infty = 108000 Pa}$$

d)Na parede do cilindro a velocidade $\upsilon_r = 0$ e temos apenas a componente υ_θ:

$$\upsilon_\theta = -2U_\infty sen\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Para $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$ a primeira parcela é sempre nula, sobrando apenas a contribuição do vórtice:

$$U = \frac{1333}{2 \times \pi \times 1{,}5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 141 m/s}$$

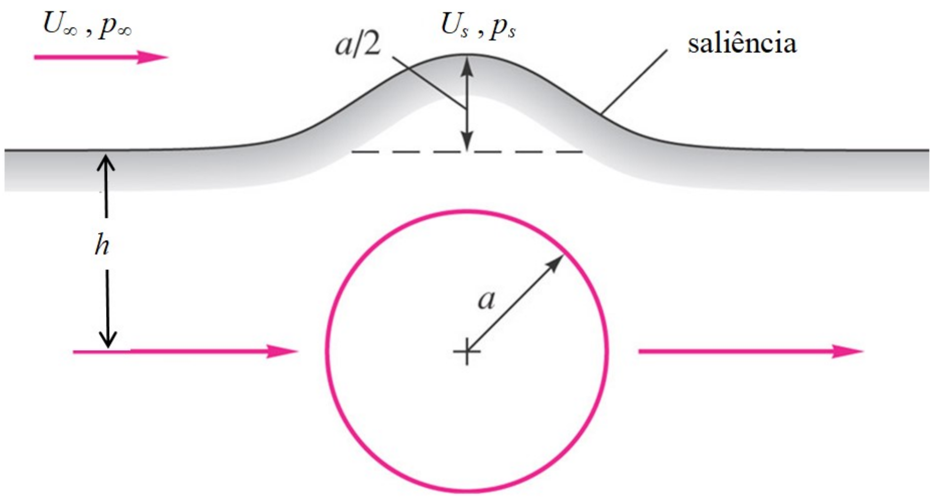
A pressão por se obtida pela equação de Bernoulli:

$$p = \rho \frac{U_\infty^2}{2} + p_\infty - \rho \frac{U^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 96071 Pa}$$

e)A sustentação é calculada pelo teorema de Kutta-Joukowsky:

$$\frac{L}{b} = -\rho U_\infty \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{b} = -160000\, N/m}$$, ou seja, vertical apontando para baixo

P8.50) Deseja-se representar o escoamento em torno de uma colina ou saliência bidimensional usando uma linha de corrente que passa acima do escoamento sobre um cilindro, como na figura. A saliência deve ter altura igual a $a/2$, em que a é o raio do cilindro. Qual é a elevação h dessa linha de corrente, em uma posição infinitamente afastada da saliência? Quais são a velocidade U_s e a pressão p_s na saliência, sabendo que na corrente livre temos U_∞ e p_∞?



Dados: Função corrente para cilindro de raio a sem circulação , velocidades e Bernoulli:

$$\psi = U_\infty a \,\mathrm{sen}\theta \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) \quad ; \quad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \mathrm{cte}$$

Solução:

Para uma posição infinitamente afastada com elevação h, $r \to \infty$ e $r\,\mathrm{sen}\theta \to h$. A função corrente na linha de corrente da saliência vale, então $\psi_s = U_\infty h$. O valor deve ser o mesmo para a posição da saliência $r_s = h + \frac{1}{2}a$, $\theta_s = \frac{\pi}{2}$:

$$\psi_s = U_\infty h = U_\infty a \left(\frac{h + \frac{1}{2}a}{a} - \frac{a}{h + \frac{1}{2}a} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{a} = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$h = \frac{3}{2}a \quad \Rightarrow \quad r_s = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a$$

A distribuição de velocidade resulta:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Na saliência, obtemos: $v_{r\,s} = 0 \quad ; \quad v_{\theta\,s} = -U_\infty \left(1 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}U_\infty$

Por Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_s + \frac{1}{2}\rho\left(v_{r\,s}^2 + v_{\theta\,s}^2\right) = p_s + \frac{1}{2}\rho\frac{25}{16}U_\infty^2$$

Assim: $p_s - p_\infty = -\frac{9}{32}\rho U_\infty^2$

Problema Complementar: Dado o escoamento:

$$u = a\left(x^2 - y^2\right);\ \upsilon = -2axy;\ w = 0$$

a)Verifique se é possível definir um potencial de velocidades. Em caso afirmativo, determine esse potencial;

b) Verifique se é possível definir uma função de corrente. Em caso afirmativo, determine essa função de corrente.

Solução:

a)

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & \upsilon & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a\left(x^2 - y^2\right) & -2axy & 0 \end{vmatrix} = \left[-2ay - (-2ay)\right]\vec{e}_z = 0$$

O escoamento é irrotacional, logo podemos definir uma função potencial dada por:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = u\,dx + \upsilon\,dy + w\,dz$$

No caso:

$$d\phi = a\left(x^2 - y^2\right)dx - 2axy\,dy$$

Podemos integrar num caminho arbitrário entre os pontos (0,0) e (x,y). Vamos tomar um caminho entre (0,0) e (x,0) (ou seja, y constante e nulo) seguido de um caminho entre (x,0) e (x,y) (ou seja, x constante e arbitrário):

$$\int_{0,0}^{x,y} d\phi = \int_{0,0}^{x,0} a\left(x^2 - y^2\right)dx - \int_{x,0}^{x,y} 2axy\,dy$$

Isso resulta:

$$\phi(x,y)-\phi(0,0)=\left[a\left(\frac{x^3}{3}-xy^2\right)\right]_{0,0}^{x,0}-\left[2ax\frac{y^2}{2}\right]_{x,0}^{x,y}$$

Que resulta:

$$\boxed{\phi=\phi_o+a\frac{x^3}{3}-axy^2}$$

b)

$$\nabla.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(x^2 - y^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}(-2axy) = 2ax - 2ax = 0$$

O escoamento é bidimensional e incompressível, logo podemos definir uma função de corrente.

Temos que:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -\upsilon\, dx + u dy$$

Isso resulta:

$$d\psi = 2axy\,dx + a\left(x^2 - y^2\right)dy$$

Repetindo o caminho de integração usado para a função potencial:

$$\int_{0,0}^{x,y} d\psi = \int_{0,0}^{x,0} 2axy\,dx + \int_{x,0}^{x,y} a\left(x^2 - y^2\right)dy$$

Isso resulta:

$$\psi(x,y) - \psi(0,0) = \left[\frac{2ax^2y}{2}\right]_{0,0}^{x,0} + \left[a\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right)\right]_{x,0}^{x,y}$$

Finalmente, obtemos:

$$\boxed{\psi = \psi_o + ax^2 y - a\frac{y^3}{3}}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 7º edição, Ed. McGraw Hill, 2011.