ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À NONA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

Exercício 1. (Seção 4.2, Problema 1) Seja $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 12$. Ache $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ e $\det(A^{-1})$.

Exercício 2. (Seção 4.2, Problema 4) Aplicando operações elementares para produzir uma matriz triangular U, calcule

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right).$$

Mude as linhas 3 e 4 da segunda matriz e recalcule os pivôs e o determinante.

Exercício 3. (Seção 4.2, Problema 7) Ache o determinante de

a) Uma matriz de posto um.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) A matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) A matriz triangular inferior U^T

d) A matriz inversa U^{-1}.

e) A matriz "triangular inversa"

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. (Seção 4.2, Problema 10) Se Q é uma matriz ortogonal, mostre que $\det(Q)$ é igual a 1 ou -1.

Exercício 5. (Seção 4.2, Problema 14) Verdadeiro ou falso? Justifique ou dê um contraexemplo:

a) Se A e B são idênticas exceto que $b_{11} = 2a_{11}$, então $\det(B) = 2\det(A)$.

b) O determinante é o produto dos pivôs.

c) Se A é inversível e B é singular, então $A + B$ é inversível.

d) Se Aé inversível e B é singular, então AB é singular.

e) O determinante de $AB - BA$ é igual a zero.

Exercício 6. (Seção 4.2, Problema 25) O escalonamento da matriz A abaixo reduz A em U. Logo $A = LU$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU.$$

Ache os determinantes de L, U, A, $U^{-1}L^{-1}$ e $U^{-1}L^{-1}A$.

Exercício 7. (Seção 4.2, Problema 26) Seja $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que a_{ij} é igual a i vezes j. Mostre que $\det(A) = 0$, exceto quando $A = [1]$.

Exercício 8. (Seção 4.2, Problema 27) Seja $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = i + j$. Mostre que $\det(A) = 0$, exceto quando $n = 1$ ou $n = 2$.

Exercício 9. (Seção 4.3, Problema 1) Para as matrizes abaixo, ache o único termo não nulo da fórmula das permutações $\det(C) = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) C_{1\sigma(1)} \ldots C_{n\sigma(n)}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule o determinante pela fórmula de permutações.

Exercício 10. (Seção 4.3, Problema 2) Expanda os determinantes do exercício anterior usando cofatores pela primeira linha. Determinando os cofatores necessários, determine os determinantes de A e B.

Exercício 11. (Seção 4.3, Problema 3) Verdadeiro ou falso?
a) O determinante de $S^{-1}AS$ é igual ao determinante de A.
b) Se $\det(A) = 0$, então ao menos um dos cofatores tem que ser igual a zero.
c) Uma matriz cujas entradas consistem apenas de zeros e uns tem determinante igual a 1, 0 ou -1.

Exercício 12. (Seção 4.3, Problema 26) As matrizes B_n tem entradas dadas por -1 imediatamente acima ou abaixo da diagonal e por 1 na primeira entrada da diagonal e por 2 nas outras entradas da diagonal. Assim, por exemplo,

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando expansão de cofatores na última linha de B_4, mostre que $|B_4| = 2|B_3| - |B_2| = 1$. Prove que a recursão $|B_n| = 2|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$ é válida. Quem são os pivôs?

Exercício 13. (Seção 4.3, Problema 36) Usando blocos de matrizes, podemos mostrar que, quando existe A^{-1}, temos

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Tome os determinantes dessas matrizes para mostrar que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B|.$$

Se $CA = AC$, mostre que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$