SMA0169 – EDP **Lista 10 - Identidades de Green**

Prof. Sergio H. Monari Soares **14 de junho de 2023**

1. Considere o problema de Neumann

$$\Delta u = f \quad \text{em } D, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = h \quad \text{sobre } \partial D.$$

Prove a unicidade de soluções a menos de constantes desse problema usando o método da energia. (Sugestão: use a primeira identidade de Green).

2. Prove o princípio de Dirichlet para a condição de fronteira de Neumann. O princípio afirma que dentre todas as funções w em definidas em D, a quantidade

$$E[w] = \frac{1}{2}\iiint_D |\nabla w|^2 \, dx - \iint_{\partial D} hw \, dx$$

é a menor para $w = u$, onde u é a solução para o problema de Neumann

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } D, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = h \quad \text{sobre } \partial D.$$

É necessário assumir que a média da função dada h é zero. Observe três características desse princípio:

   (a) Não há nenhuma restrição nas funções testes w.

   (b) A função h aparece na energia.

   (c) O funcional $E[w]$ não muda se uma constante é adicionada a w.

(Sugestão: siga o método usado para o problema de Dirichlet.)

3. Prove a fórmula de representação para funções harmônicas em dimensão 2.

4. Forneça uma outra demonstração da propriedade do valor médio em dimensão três, escolhendo D como uma bola e x_0 como seu centro na fórmula de representação de uma função harmônica em D.

5. Mostre que a função de Green é única. (Sugestão: tome a diferença de duas deles.)

6. Prove o teorema a seguir, que dá a solução da equação de Poisson em termos da função de Green.

Teorema. A solução do problema

$$\Delta u = f \text{ em } D, \qquad u = h \text{ sobre } \partial D$$

é dada por

$$u(x_0) = \iint_{\partial D} h(x) \frac{\partial}{\partial \eta} G(x, x_0) dS + \iiint_D f(x) G(x, x_0) dx.$$