Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I – Módulo 7

Frações Parciais- Adicionais

Exercício 1 *Use decomposição em frações parciais para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \frac{16x+69}{x^2-x-12}dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-10x-60}{x^3+x^2-12x}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{-3x^3+x^2+2x+3}{x^4+x^3}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+4}{x^3-x^2+x-1}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x+1)^2}dx,$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)}dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^2+x+2}dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx$

(j) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3z^2+1}{(z+1)(z-5)^2}dz$ (k) $\displaystyle\int \frac{2+w^4}{w^3+9w}dw$ (l) $\displaystyle\int \frac{8+t+6t^2-12t^3}{(3t^2+4)(t^2+7)}dt$

Exercício 2 *No seguinte exercicio verifique que:* $A=1, B=-1, C=-1, D=1, E=0.$

$$\int \frac{16-4x+5x^2-x^3}{x^5+8x^3+16x}dx = \cdots = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+4}dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}dx.$$

Agora, responda as seguintes perguntas:

1. *Como se resolve estas três últimas integrais acima?. E se a constante E fosse uma constante não nula? Como você resolveria a última integral?*

2. *E se fossem integrais do tipo:* $\int\left(\frac{3}{2x+1}+\frac{2}{(3x+2)^2}+\frac{2x+3}{(2x^2+x+1)}\right)dx$ *? Como você resolveria?*

Integração por substituição trigonométrica - Adicionais

Exercício 3 *Faça substituição trigonométrica e então calcule a integral:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$

(d) $\displaystyle\int 3x^5\sqrt{16-x^2}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{z^5}{(9z^2-25)^{\frac{3}{2}}}dz,$ (f) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-4t^2}}{t^2}dt$ (h) $\displaystyle\int \frac{w^5}{\sqrt{8w^2+1}}dw$ (i) $\displaystyle\int \frac{2}{(x-3)^6\sqrt{-x^2+6x-5}}dx$

Área

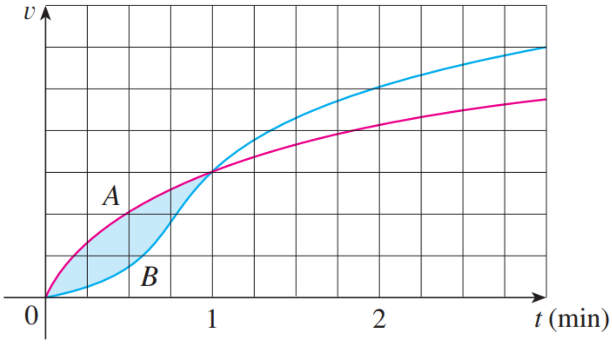
Exercício 4 *Dois carros,* A *e* B, *largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.*

(a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.

(b) Qual o significado da área da região sombreada?

(c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.

(d) *Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.*



Exercício 5 *Calcule a área da região limitada pelos gráficos de* $y - x = 6, y - x^3 = 0$ *e* $2y + x = 0$.

Exercício 6 *Determine a área das regiões definidas pelos gráficos*

(a) $x + y = 3, y + x^2 = 3$

(b) $y = x^3, y = x^2$

(c) $x = 4y - y^3, x = 0$

(d) $y = 1 - x^2, y = x - 1$

(e) $y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0$

(f) $y^2 = -x, x - y = 4, y = -1, y = 2$

Exercício 7 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das seguintes funções e retas abaixo:*

(a) $f(x) = x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}, x = 2, x = 4$ *e* $y = 0$

(b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, *para* $x \in [-2, 2], x = 0, x = 2$ *e* $y = 0$

(c) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|, x = -2\pi, x = 2\pi$ *e* $y = 0$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, *para* $x \in \mathbb{R}, x = -2\pi, x = 2\pi$ *e* $y = 0$

(e) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{10 - x^2}}$, *para* $x \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}], x = 2$ *e* $y = 0$

Exercício 8 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas abaixo:*

(a) $y = x^2$ *e* $y = 4x - x^2$

(b) $y = \cos(x), y = \cos^2(x), x = 0$ *e* $x = \pi$

Exercício 9 *Calcule a área da região limitada do plano xy, que está à direita do eixo-y e à esquerda da parábola* $x = 2y - y^2$.

Exercício 10 *Calcule a área da região limitada abaixo do gráfico da função* f *(e acima do eixo* x *), nos seguintes casos:*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x \in [0,1] \\ 2-x & \text{para} \quad x \in [1,2] \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{para } x \in [0,1] \\ -(x-1)(x-4) & \text{para } x \in [1,4] \end{cases}$

Exercício 11 *Desenhe o subconjunto* A*, do plano* xy*, e calcule sua área nos seguintes casos:*

(a) *A é o subconjunto limitado do plano xy, delimitado pelas retas* $x = 1, x = 3$*, pelo eixo* x *e pelo gráfico de* $y = x^3$*.*

(b) *A é o conjunto do plano limitado pelas retas* $x = 1, x = 4, y = 0$ *e pelo gráfico de* $y = \sqrt{x}$*.*

(c) *A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, tais que* $0 \leq y \leq 9 - x^2$*.*

(d) *A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, tais que* $1 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq \frac{x}{1+x^2}$*.*

Exercício 12 *Seja* $x_o \in \mathbb{R}$ *o ponto máximo da função* $f(x) = x^2e^{-x}$*, para* $x \in \mathbb{R}$*. Calcule a área do conjunto limitado* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq x_o \text{ e } 0 \leq y \leq x^2e^{-x}\right\}$*.*

Exercício 13 *Para* $a, b > 0$ *considere a elipse de equação* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*.*

- *Determine a função* $y = f(x)$ *cujo gráfico é parte superior da elipse.*
- *Determine a área da elipse usando substituição trigonométrica e a identidade* $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$*.*

Perímetro de curvas

Exercício 14 *Calcule o perímetro das seguintes curvas:*

(a) $y = \ln(\sec(x)) \quad$ *para* $0 \leq x \leq \pi/4$

(b) $y = x^{3/2}$ *para* $0 \leq x \leq 3$

(c) $y = \ln\left(1 - x^2\right), \quad \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

(d) $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3), \quad 1 \leq y \leq 9$

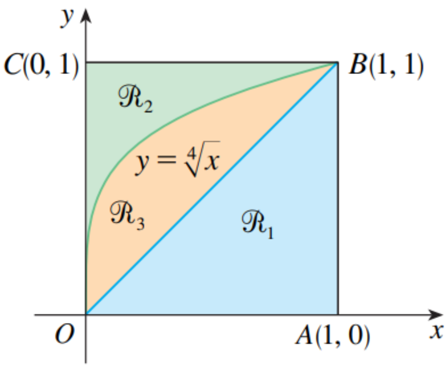
(e) $x = \frac{y^4}{8} + \frac{1}{4y^2}, \quad 1 \leq y \leq 2$

Exercício 15 *Mostre que o comprimento de uma circunferência de raio* r *é* $2\pi r$*.*

Exercício 16 *Use a fórmula do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva y=* $\sqrt{2-x^2}, 0 \leq x \leq 1$. *Verifique sua resposta observando que a curva é parte de um círculo.*

Volume de sólidos de rotação

Exercício 17 *Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região* R_1 *em torno de* AB.



Exercício 18 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo-xda região do plano-xOy delimitada pelos gráficos das funções* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercício 19 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se a região*

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq 1\right\},$$

em torno do eixo-y.

Exercício 20 *As seções transversais de um certo sólido, por planos perpendiculares ao eixo-x, são círculos, cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas no plano-xOy definidas pelas equações* $y = x^2$ *e* $y = 8 - x^2$. *Encontre seu volume.*

Exercício 21 *Para* $a > 0$ *fixado, temos que a base de um certo sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

Cada seção plana do sólido por planos perpendiculares ao eixo-x é um quadrado com um lado sobre a base do sólido. Calcule o seu volume. Faça o mesmo quando a base desde sólido é o círculo

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2\right\}.$$

Exercício 22 *A base de um certo sólido é a região do plano-xOy delimitada pelo eixo-x, pela curva dada por* $y = \text{sen}(x)$ *e pelas retas* $x = 0$ *e* $x = \pi/2$. *Cada seção plana do sólido perpendicular ao eixo-x é um triângulo equilátero com um lado na base do sólido. Encontre o volume do sólido.*

Exercício 23 *Em cada um dos itens abaixo, esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Além disso, usando o método das cascas cilíndricas, determine o volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo indicado.*

(a) $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$ *e o eixo-y*

(b) $y = x^2, y^2 = 8x$ *e o eixo-y*

(c) $y^3 = x, y = 3, x = 0$ *e o eixo-* x

(d) $x^2 = 4y, y = 4,$ *e o eixo-x*

(e) $y = \sqrt{x+4}, y = 0, x = 0$ *e o eixo-x*

(f) $16y = x^2, y^2 = 2x$ *e o eixo-y.*

Exercício 24 *Seja* R *a região do plano-xOy delimitada pela parábola de equação* $x = y^2$ *e pela reta* $x = 9$. *Para cada um dos itens abaixo, determine o volume do sólido que tem a região* R *como base, sabendo-se que a secção relativa ao eixo-x é*

(a) *um quadrado.*

(b) *um retângulo de altura igual a 2 .*

(c) *um semicírculo.*

(d) *um quarto de círculo.*

(e) *um triângulo equilátero.*

(f) *um triângulo, cuja altura é igual a* $1/4$ *do comprimento da sua base.*

(g) *um trapézio com base inferior no plano-xOy, cuja base superior tem comprimento igual à metade do comprimento da sua base inferior e o comprimento da altura é igual a* $1/4$ *da sua base inferior.*

(h) *um paralelogramo, com base no plano-xOy e cuja altura é igual a duas vezes o comprimento de sua base.*

Exercício 25 *Usando integração, prove que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito, isto é, um cone de altura* h *e raio de base* r *tem volume* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Integrais impróprias

Exercício 26 *Calcule*

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx.$$

Exercício 27 *Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:*

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(b) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(d) $\int_0^\infty e^{2x} dx$

(e) $\int_0^\infty e^{-2x}$

(f) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

(g) $\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2} dx, s > 0$

(h) $\int_{-1}^\infty e^{-sx} dx, s > 0$

(i) $\int_0^\infty te^{-st} dt, s > 0$

(j) $\int_0^\infty e^{-st} \cos t dt, s > 0$

(k) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$

(l) $\int_1^\infty \ln x dx$

(m) $\int_{-\infty}^0 e^{st}$ *sentdt,* $s > 0$

(n) $\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

(o) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln |x|}{x} dx$

(p) $\int_1^\infty \ln^2 x dx$.

Exercício 28 *Verifique para quais valores de* α *a integral* $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^\alpha} dx$ *converge e para quais diverge.*

Exercício 29 *Determine todos os números naturais n para os quais a integral imprópria* $\int_1^\infty x^n \ln x dx$ *é convergente.*

Exercício 30 *Se* f *é contínua em* $(-\infty, \infty)$ *definimos* $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx$. *Identifique quais integrais abaixo convergem e quais divergem.*

(a) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx$

(d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$

Exercício 31 *Se* f *é contínua em* $(x_0, b]$ *então* $\int_{x_0}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to x_0^+} \int_a^b f(x)dx$. *De modo análogo, se* f *é contínua em* $[a, x_0)$ *então* $\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{b\to x_0^-} \int_a^b f(x)dx$. *No caso do limite existir dizemos que a integral converge. Com estas definições verifique se as integrais abaixo convergem ou não:*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+2x^2+x}dx,$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}dx$

Exercício 32 *Teste a convergência das integrais abaixo:*

(a) $\displaystyle\int_3^\infty e^{-2x}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3}$ (c) $\displaystyle\int_8^\infty x^{-4/3}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x dx$ (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}dx,$ (f) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\cos x dx$ (h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty |x|\cos x^2 dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\cos x dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}dx$ (l) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx$

(m) $\displaystyle\int_0^e \ln x dx$ (n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+4x+1}{x^4-3x+2}dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

(p) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x^2-18}dx$ (q) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}(x+1)dx$ (r) $\displaystyle\int_0^\infty 4x^3e^{-x^4}dx$

(s) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

Exercício 33 *Use o critério da comparação ou comparação por limite para decidir se as integrais abaixo convergem ou divergem:*

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1+\cos x}{\sqrt{|x|^3}}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-0.05}{x^2}dx$ (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}dx,$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}dx$

(g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^3-3x-1}{\sqrt{|x|^7}}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{\cos x+2}dx$

Exercício 34 *Encontre o valor da constante* C *para a qual a integral*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right)dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.