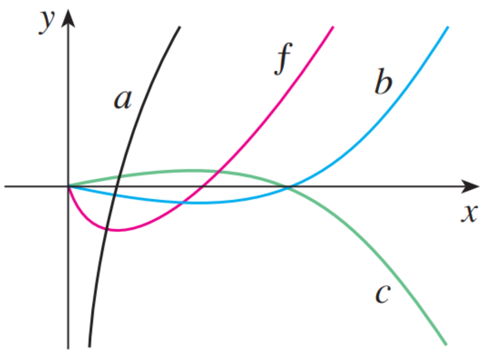
Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I – Módulo 6

Primitivas e método da substituição

Exercício 1 *O gráfico de uma função* f *está mostrado. Qual gráfico é uma primitiva de* f *e por quê?*



Exercício 2 *Determine as primitivas das funções abaixo:*

(a) $\int (3x+1)dx$ (b) $\int (x+\frac{1}{x})dx$ (c) $\int \frac{x^2-5x+1}{3x^2}dx$ (d) $\int e^{2x}dx$

(e) $\int \cos 3x dx$, (f) $\int \operatorname{sen}(2x)dx$, (g) $\int 7e^{-3x}dx$ (h) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

(i) $\int (4\sqrt[5]{x^2}-\sqrt{x})dx$ (j) $\int x\sqrt{x}dx$ (l) $\int (3x-1)^{2003}dx$ (m) $\int \operatorname{sen}^7 x \cos x dx$

(n) $\int \operatorname{tg}^3 x \cos x dx$ (o) $\int e^x\sqrt[3]{2+e^x}dx$ (p) $\int \frac{6}{4x+3}dx$ (q) $\int \frac{1}{(1-x)^4}dx$

(r) $\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}dx$ (s) $\int \operatorname{sen} x \sec x dx$ (t) $\int \frac{\sec^2 x}{3+2\operatorname{tg} x}dx$ (u) $\int x\operatorname{sen}(3x^2)dx$

(v) $\int x\sqrt{32+4x^2}dx$ (x) $\int \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x dx$ (z) $\int 3^{2x}dx$ (a1) $\int \sec x dx$

Exercício 3 *Usando a técnica por substituição, encontre as integrais indefinidas:*

(a) $\int \frac{8x^2}{x^3+2}dx$ (b) $\int x\sqrt{x-4}dx$ (c) $\int (2x+3)^{11}dx$

(d) $\int \frac{t^5+2t}{\sqrt{t^6+6t^2}}dt$ (e) $\int \left(\frac{2z^2}{z^3+5}-\frac{3z}{z^2-10}\right)dz$, (f) $\int [\sqrt{4t}+\cos(2t)]dt$

(g) $\int \frac{\cos(t)}{-\operatorname{sen}^2(t)}dt$ (h) $\int \left(2z^2-3\right)^5 z dz$ (i) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(j) $\int e^{\cos(x)}\sin(x)dx$ (k) $\int \sin(x)\tan(\cos(x))dx$ (l) $\int \frac{(\ln(x))^4}{x}dx$

(m) $\int \cos^3(x)dx$

Exercício 4 *Utilize as fórmulas trigonométricas abaixo para calcular as primitivas das funções dadas a seguir:*

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

(a) $\int \operatorname{sen}(5x)\cos(x)dx$ (b) $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)dx$

(c) $\int \cos(5x)\cos(6x)dx$ (d) $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx,\ m,n \in \mathbb{N}$

(e) $\int \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx,\ m,n \in \mathbb{N}$.

Exercício 5 *Utilize o algoritmo da divisão entre polinômios para reescrever* f *e facilitar o cálculo das seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{x}{x+1}dx$ (b) $\int \frac{x+2}{x-3}dx$ (c) $\int \frac{2x-5}{3x+1}dx$ (d) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ (e) $\int (\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{x^3}{x-1})dx$.

Exercício 6 *Sabendo que* $\int \frac{1}{1^2+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)$, *determine as seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx, a > 0$ (b) $\int \frac{3x+2}{x^2+1}dx$ (c) $\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ (d) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

(e) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

Exercício 7 *Determine as seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ (b) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ (c) $\int \frac{x}{x^4+16}dx$ (d) $\int e^x(e^{2x}+1)^{-1}dx$

(e) $\int x^{-1}\cos(\ln x)dx$

Exercício 8 *Sabendo que* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x)$, *determine as seguintes primitivas:*

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a > 0$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$.

Exercício 9 *Resolva* $\int \tan(x)dx$ *fazendo:*
(a) $u = \operatorname{sen}(x)$
(b) $u = \cos(x)$
(c) Qual é mais fácil? Ambas resolvem?

Exercício 10 *Resolva:*

(a) $\int \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}^{1/3}(3x)}dx$ (b) $\int \sqrt{3+x}\,(x+1)^2dx$ (c) $\int \cos^3(x)dx$

(d) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ (e) $\int \frac{t^5+2t}{\sqrt{t^6+6t^2}}dt$

Exercício 11 *Calcule a integral indefinida*

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx.$$

Integral por partes

Exercício 12 *Utilizando a técnica por integração por partes na integral indefinida, resolva:*

(a) $\int \ln(x)dx$

(b) $\int xe^{3x}dx$

(c) $\int x^2 \operatorname{sen}(3x)dx$

(d) $\int e^x \cos(x)dx$

(e) $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$

(f) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x}dx$

(g) $\int \operatorname{arctg}(x)dx$

(h) $\int \operatorname{arcsen}(x)dx$

(i) $\int x\ln(x)dx$

(j) $\int x \operatorname{arctg}(x)dx$

(k) $\int x \operatorname{arcsen}(x)dx$

(l) $\int e^{-x}\cos(2x)dx$

(m) $\int \cos(x)\ln(\sin(x))dx$

Área, integrais definidas, TFC

Exercício 13 *(a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito em um círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$, mostre que*

$$A_n = \frac{1}{2}nr^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$.

Exercício 14 *Calcule a integral, interpretando-a em termos de área*

$$\int_0^{10} |x-5|dx.$$

Exercício 15 *Encontre a derivada da função*

$$g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t dt.$$

Exercício 16 *A densidade linear de uma barra de comprimento* 4m *é dada por* $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$*, medida em quilogramas por metro, em que* x *é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.*

Integrais definidas

Exercício 17 *Encontrar o valor das integrais definidas:*

(a) $\int_{-3}^{2} |x+1| dx$

(b) $\int_{0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(c) $\int_{7}^{12} dx$

(d) $\int_{1}^{0} t^2 \left(t^{\frac{1}{3}} - \sqrt{t}\right) dt$

(e) $\int_{3}^{2} \frac{x^2-1}{x-1} dx$

(f) $\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{(1-v^2)^2} dv$

(h) $\int_{0}^{1} x^2 e^x dx$

(i) $\int_{1}^{2} \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

(j) $\int_{0}^{1} \operatorname{sen}(x) e^{[\cos(x)+1]} dx$

(k) $\int_{1}^{2} x 2^x dx$

(l) $\int_{0}^{1} x(2x+3)^{99} dx$

(m) $\int_{0}^{\pi/4} \sec^4\theta \operatorname{tg}^4\theta d\theta$

Exercício 18 *Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo* x *com equação* $x = x(t)$ *e com velocidade* $v = v(t)$ *contínua em* $[a, b]$*. Qual é uma primitiva de* v*?*

(a) *A diferença* $x(b) - x(a)$ *é o deslocamento da partícula entre os instantes* $t = a$ *e* $t = b$*. Como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser utilizado para calcular o deslocamento de uma partícula? Definamos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes* $t = a$ *e* $t = b$ *por* $\int_a^b |v(t)| dt$.

(b) *Uma particula desloca-se sobre o eixo* x *com velocidade* $v(t) = -t^2 + t$*, para* $t \geq 0$*. Calcule o espaço percorrido entre os instantes* $t = 0$ *e* $t = 2$.

(c) *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* x *com velocidade* $v(t) = 2t - 3$, *para* $t \geq 0$. *Calcule o deslocamento entre os instantes* $t = 1$ *e* $t = 3$. *Calcule o espaço percorrido entre os instantes* $t = 1$ *e* $t = 3$. *Descreva o movimento realizado pela particula entre os instantes* $t = 1$ *e* $t = 3$.

Exercício 19 *Seja* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável.*

1. *Mostre que se* f *é uma função par, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2. *Mostre que se* f *é uma função impar, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exercício 20 *Estude a paridade das funções que aparecem no integrando das integrais definidas abaixo e depois calcule-as:*

(a) $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 4\right) dx$

(b) $\int_{-17\pi/4}^{17\pi/4} \left[\text{sen}\left(x^3\right) - x^7 \cos(x)\right] dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \frac{x^{17}}{x^2+1} dx$

(d) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^4+1} dx$

(e) $\int_{-1}^{1} \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x^3-x)} dx$

Exercício 21 *Sendo* $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$ *contínua, calcule* $\int_{-3}^{3} xf\left(x^2\right) dx$.

Exercício 22 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função* w*-periódica e integrável em qualquer intervalo limitado da reta, mostre que*

$$\int_{0}^{w} f(x)dx = \int_{a}^{a+w} f(x)dx$$

para cada $a \in \mathbb{R}$ *e para um real* w *fixados.*

Exercício 23 *Verifique que para todo natural* $n > 1$, *temos* $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t)dt = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(t)dt$.

Mudança de variáveis para integral definida

Exercício 24 *Nos casos abaixo aplique o Teorema da Mudança de Variáveis para Integral (T.M.V.I) para resolver as seguintes integrais.*

(a) $\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}dx$

(b) $\int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u^3+1)^2} du$

(c) $\int_{-1}^{0} t\left(t^2+1\right)^{80} dt$

(d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\sin(t)dt$

(e) $\int \frac{\pi}{3} \sin^3(z)dz$

(f) $\int_{0}^{1} \operatorname{senh}^3(t)dt$

Exercício 25 *Suponha que a função* $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ *é contínua em* $[-2,0]$ *e que* $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 3$. *Calcule* $\int_{0}^{2} f(x-2)dx$.

Exercício 26 *Suponha a função* $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ *contínua em* $[-1,1]$ *e que* $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 5$. *Calcule* $\int_{0}^{1} f(2x-1)dx$.

Exercício 27 *Sendo* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *contínua e* $\int_{-4}^{2} f(x)dx = 12$, *encontre* $\int_{0}^{2} f(2-3x)dx$.

Derivada no sinal da integral - Teorema Fundamental do Cálculo

Exercício 28 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar a expressão da função* $f' : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *onde* $f : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por:*

(a) $f(x) = \int_{0}^{x} \left(t^2+1\right)^{10} dt$

(b) $f(x) = \int_{x}^{0} \sqrt{u^2+4u}du$

(c) $f(x) = \int_{-1}^{x} t\operatorname{sen}(t)dt$

(d) $f(x) = \int_{0}^{x^3} \cos^{\frac{1}{3}}(t)dt$

(e) $f(x) = \int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} \sqrt{t^2+1}dt$

(f) $f(x) = \int_{0}^{4x} \operatorname{sen}^{10}(t)dt$

Exercício 29 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* Ox, *de modo que em cada instante* t *a velocidade é o dobro da posição* $x = x(t)$. *Sabe-se que* $x(0) = 1$. *Determine a posição da partícula no instante* t.

Exercício 30 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* Ox *com velocidade* $v(t) = at+v_o, t \geq 0$, *(a e* v_o *constantes). Sabe-se que, no instante* $t = 0$, *a partícula encontra-se na posição* $x = x_0$. *Determine a posição* $x = x(t)$ *da partícula no instante* t.

Exercício 31 *Determine a posição* $x = x(t)$ *de uma partícula que se desloca sobre o eixo Ox, sabendo que:*

(a) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ *e* $x(0) = 0$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}, v(0) = 0$ *e* $x(0) = 1$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} = \operatorname{sen}(3t), v(0) = 0$ *e* $x(0) = 0$

Exercício 32 *Determine a função cujo gráfico passe pelo ponto* $(0,1)$ *e tal que a reta tangente no ponto de abscissa* x *(para qualquer* x *) intercepte o eixo Ox no ponto de abscissa* $x+1$.

Aplicações do teorema do valor médio para integrais

Exercício 33 *Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor médio das funções* f *e determine* $c \in \mathbb{R}$, *tal que* $f(c) =$ *valor médio da função* f *no intervalo* $[a, b]$*:*

(a) $f(x) = 3x e [a, b] = [1, 2]$.

(b) $f(x) = \text{sen}(x) e [a, b] = [-\pi, \pi]$.

(c) $f(x) = \text{sen}(x) e [a, b] = [0, \pi]$.

(d) $f(x) = x^2 - 2x e [a, b] = [0, 2]$.

Frações parciais

Exercício 34 *Calcule as seguintes integrais:*

(a) $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

(b) $\int \frac{x}{x^2-4} dx$

(c) $\int \frac{x+3}{x^2-x} dx$

(d) $\int \frac{1}{x^2+5} dx$

(e) $\int \frac{2x+1}{x^2-1} dx$

(f) $\int \frac{x+1}{x^2-9} dx$

(g) $\int \frac{1}{x^2-x-2} dx$

(h) $\int \frac{x+1}{x^2+9} dx$

(i) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$

Substituição trigonométrica

Exercício 35 *Usando substituição trigonométrica, calcule as integrais abaixo:*

(a) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx, a > 0$

(b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

(f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{6x-x^2}} dx$

(g) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

(h) $\int \frac{1}{(16-x^2)^{3/2}}\,dx$

(i) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Exercício 36 *Use frações parciais para obter a fórmula:* $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$. *Calcule também essa integral por substituição trigonométrica e compare os resultados.*

Exercício 37 *Encontre a área da região em forma de lua crescente delimitada pelos arcos dos círculos de raios* r *e* R. *(Veja a figura.)*