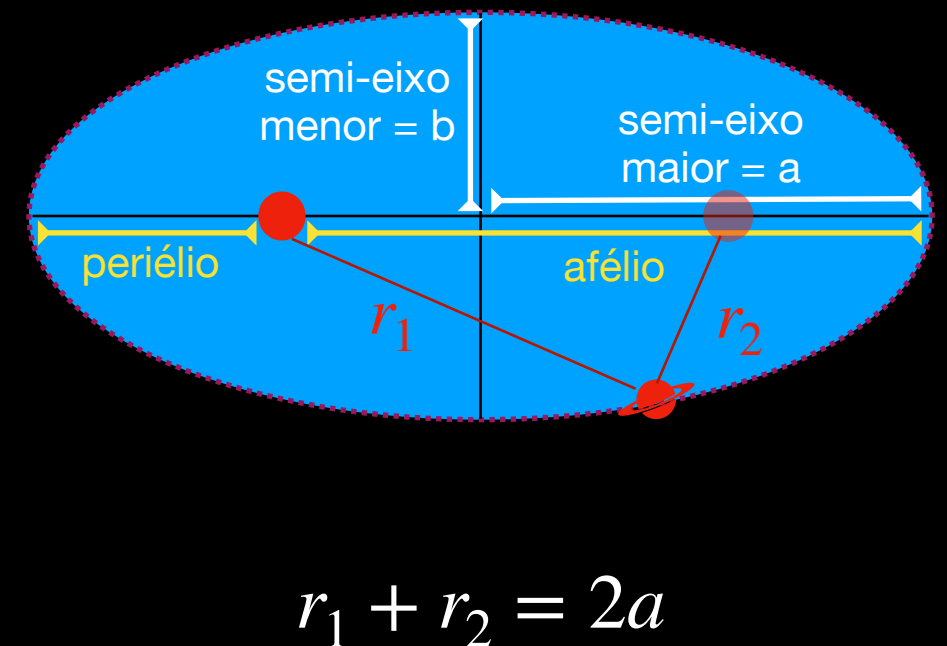
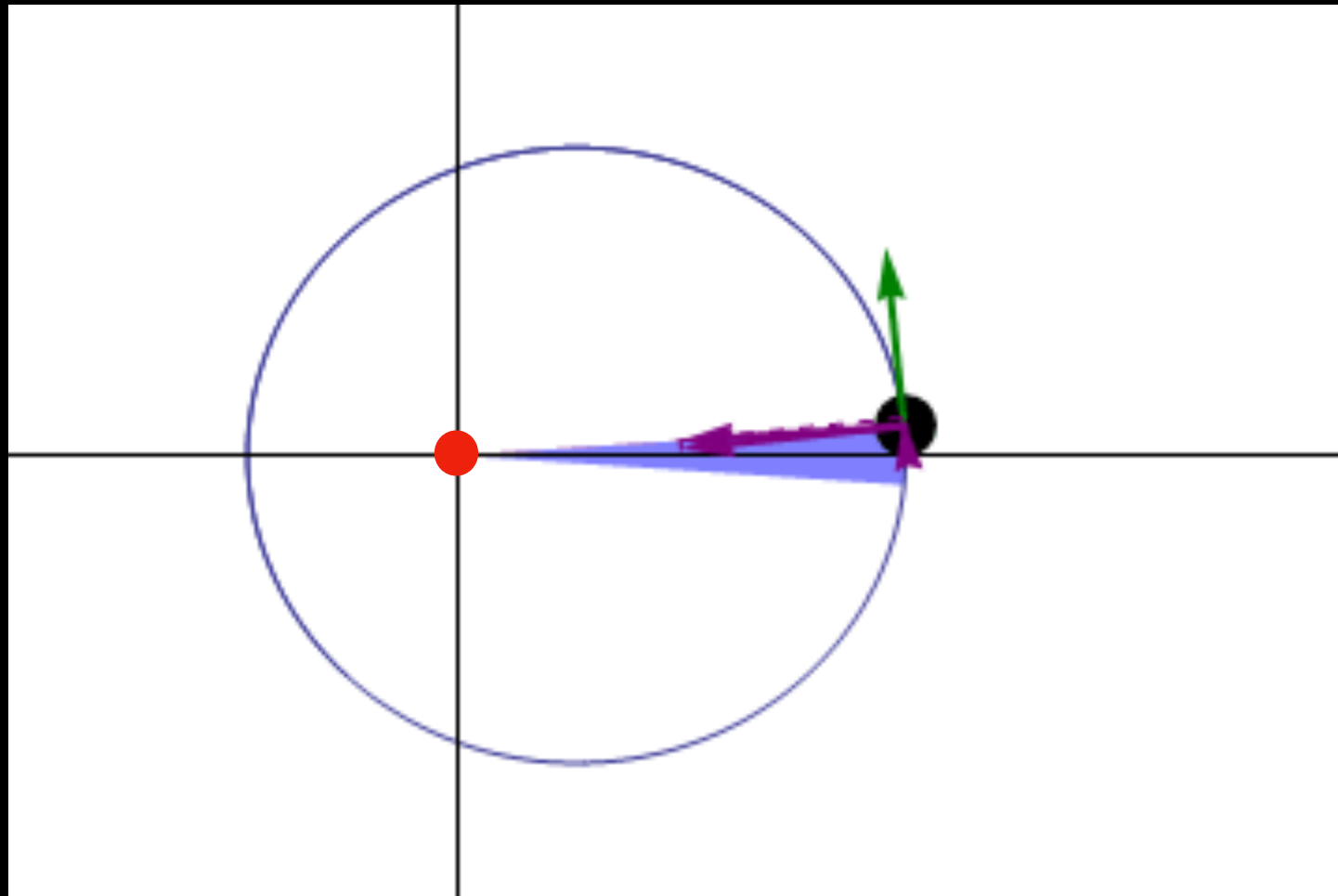


# Física I



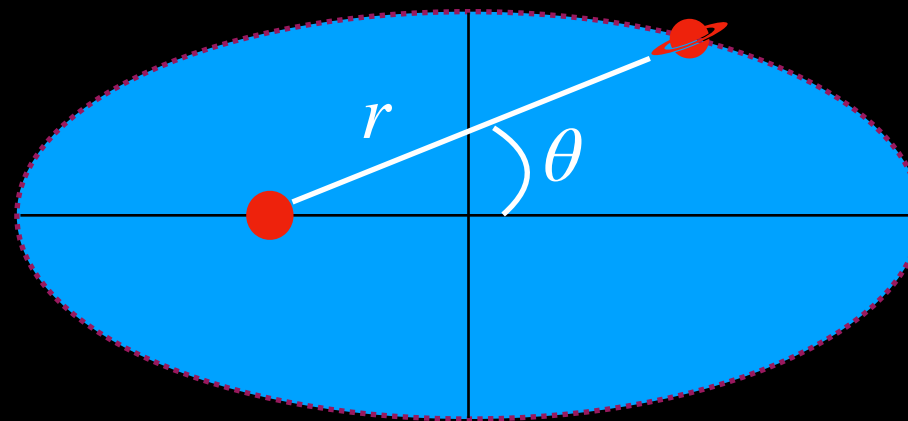
A Lei da Gravitação Universal

# As órbitas Keplerianas (elipses)



Um corpo em órbita ao redor do **Centro de Massa** de um sistema de 2 corpos se move numa elipse

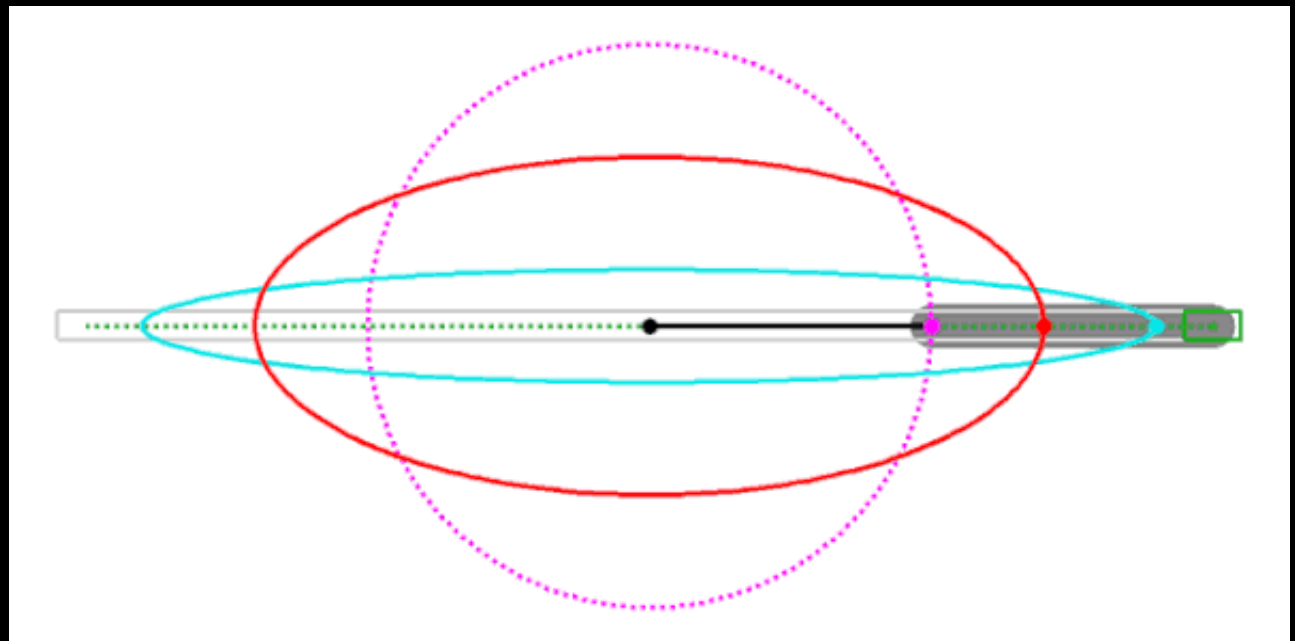
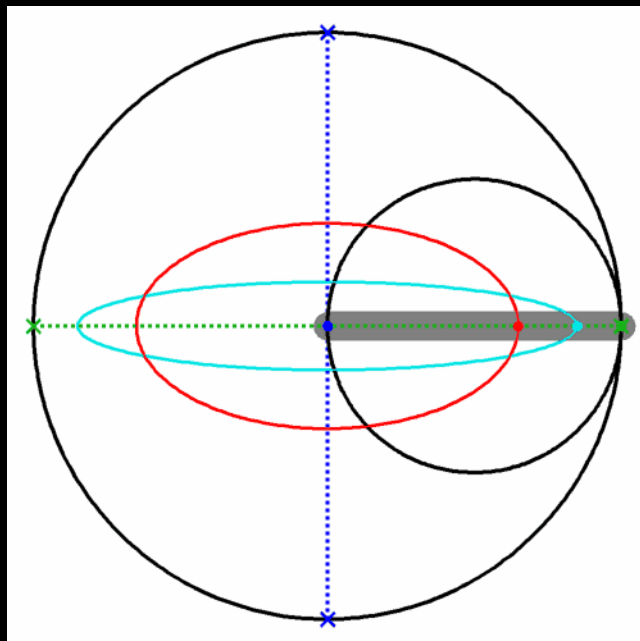
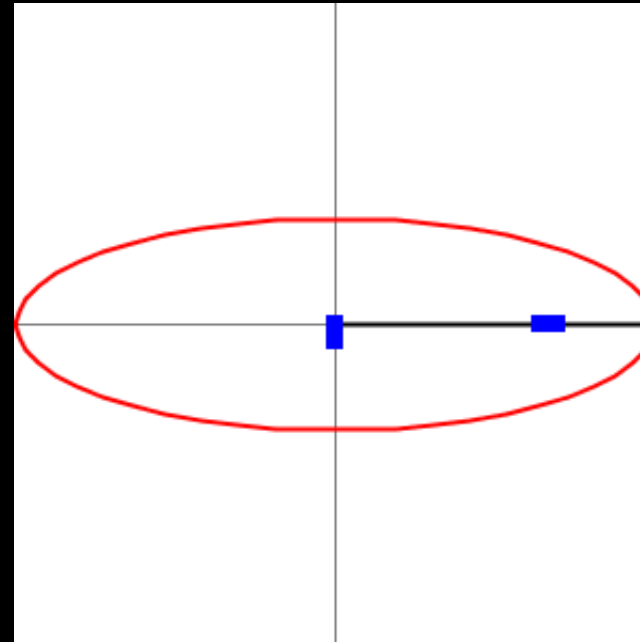
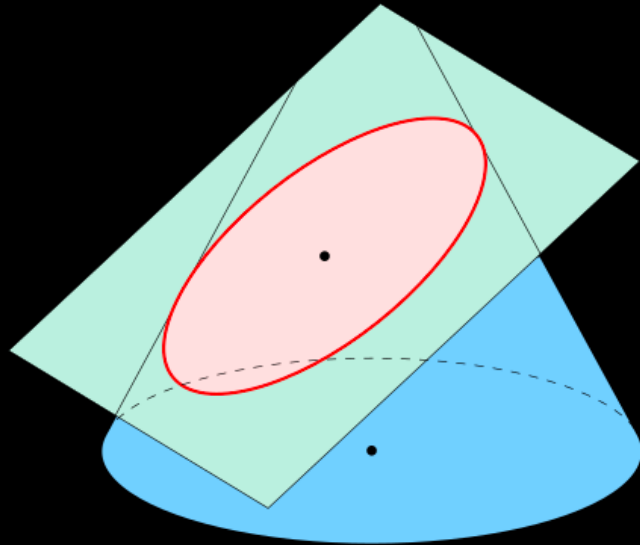
# As órbitas Keplerianas (elipses)



$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm \cos \theta} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

As elipses são curvas realmente mágicas...  
veja <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

# As órbitas Keplerianas (elipses)



As elipses são curvas realmente mágicas...  
veja <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

# As órbitas Keplerianas (elipses)

time : 33.2000

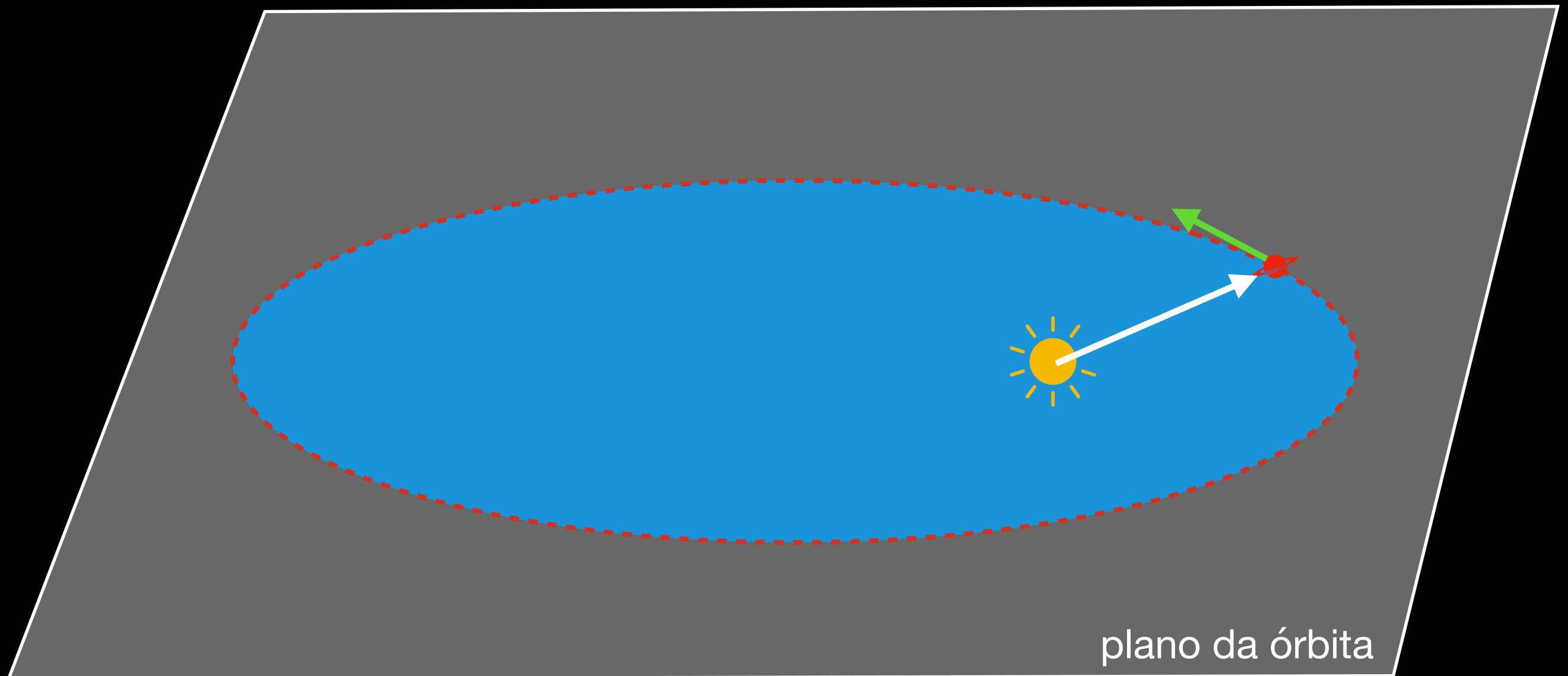
**Simulações de Rubens Machado (UFOP)**

<http://professor.ufop.br/rgmachado/hist%C3%B3ria-da-astronomia>

circular orbit

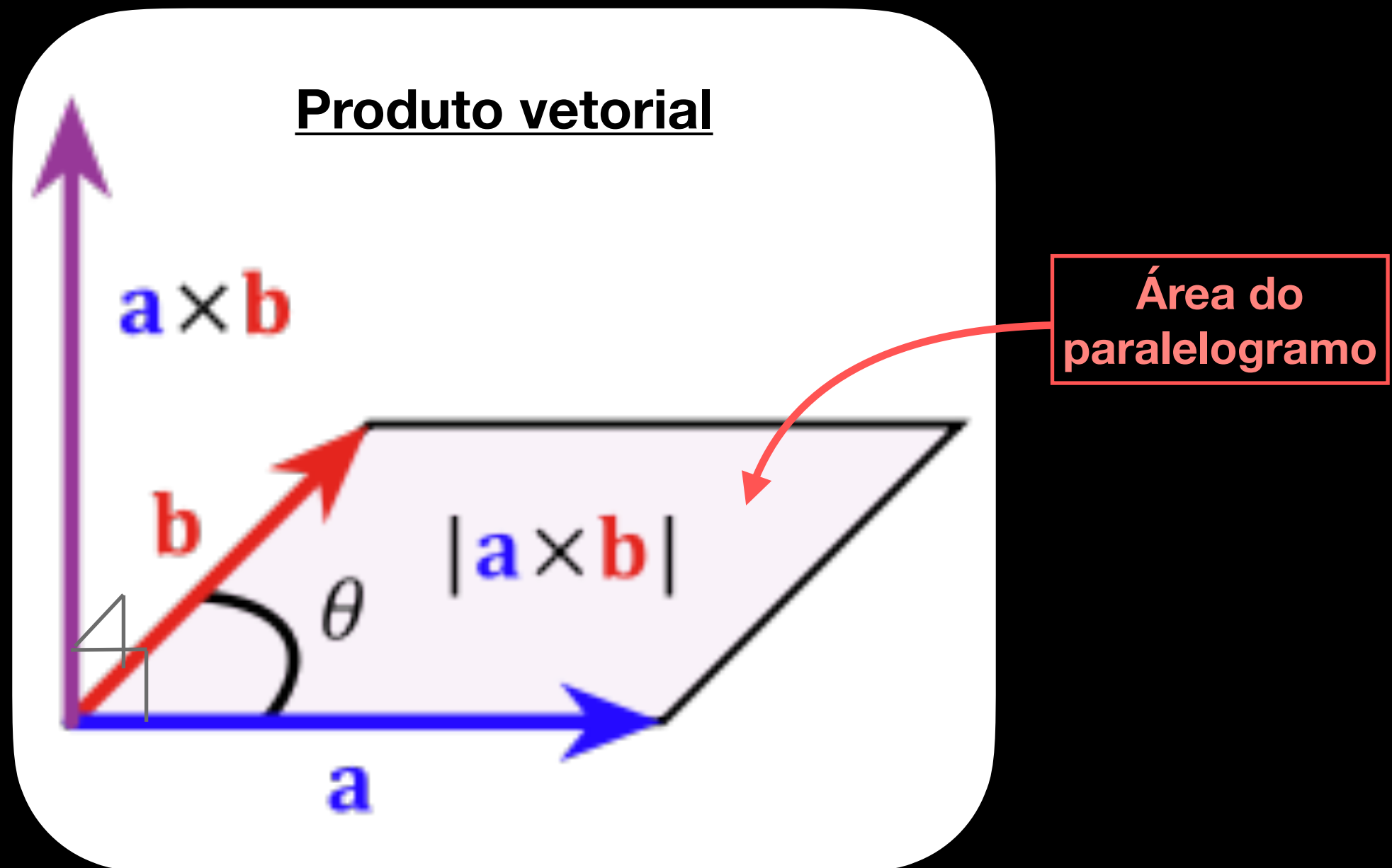


# O plano da órbita



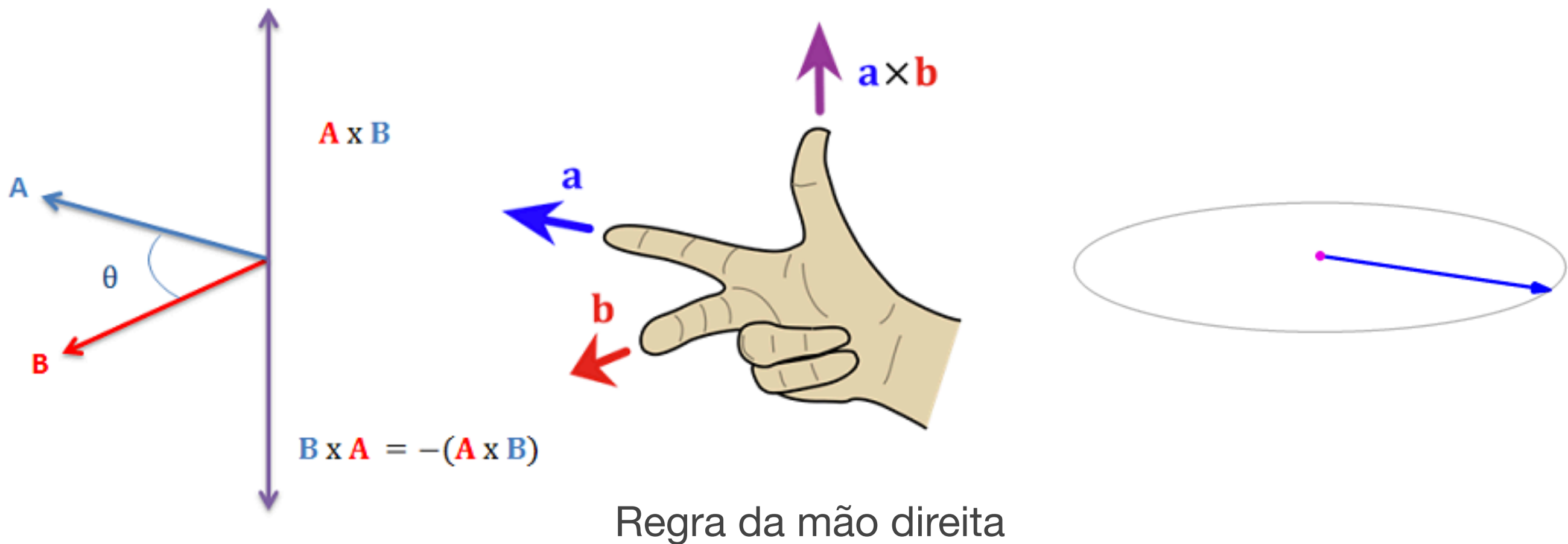
Mas vamos retornar ao problema de 2 corpos.  
Comece notando que o ***plano da órbita é fixo.***

# O plano da órbita



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

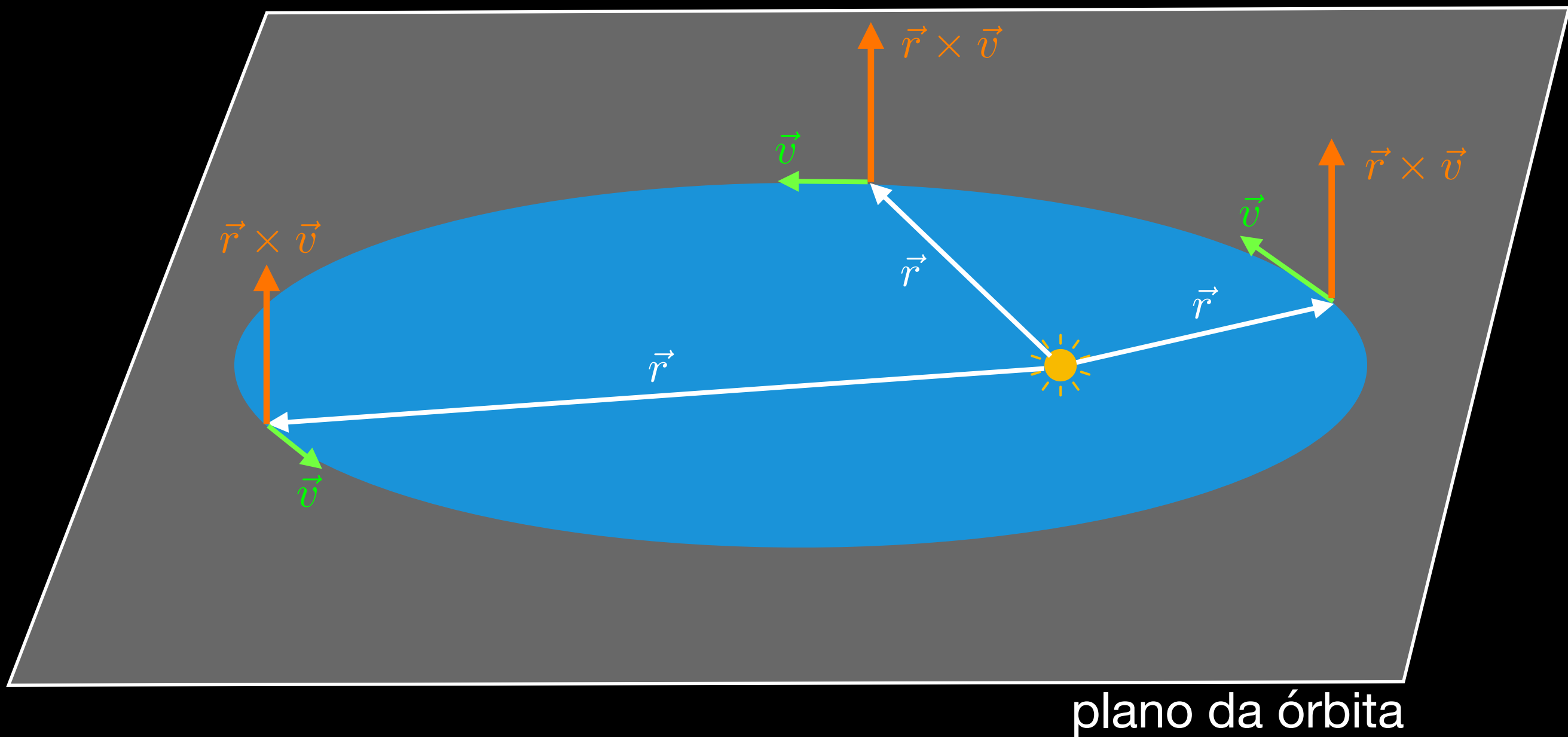
# O plano da órbita



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$



# O plano da órbita



# Duas observações, três teoremas

- Vamos partir da observação de *duas propriedades das órbitas*:
  - (a) O *plano da órbita* não muda com o tempo: o eixo perpendicular ao movimento é fixo.
  - (b) A *direção dos semi-eixos* da elipse são fixas (não mudam com o tempo). Isso é equivalente a dizer que as *órbitas são fechadas*.
- Essas propriedades seguem de três Teoremas, que vamos provar nesta aula:
  - (i) Para forças centrais ( $\vec{F} \sim \hat{r}$ ), a quantidade  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \mu \vec{v}$  (um vetor perpendicular ao plano da órbita) permanece constante.
  - (ii) No caso específico de uma força central que decai com  $\sim 1/r^2$ , a direção definida pelo semi-eixo maior pode ser expressa pelo vetor de Laplace-Runge-Lenz, e esse vetor também permanece fixo (constante).
  - (iii) No caso particular da força Newtoniana, as trajetórias são seções cônicas.

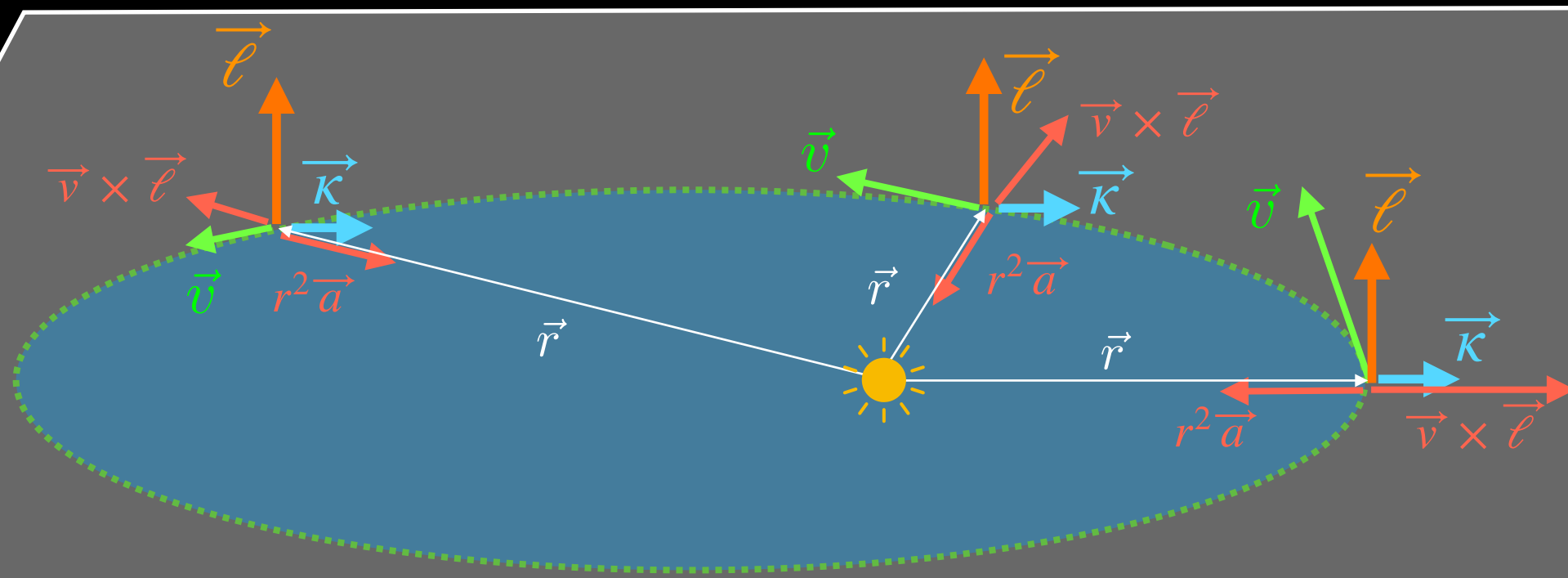
# Duas observações, três teoremas

## Teorema (ii)

- Vamos introduzir o **vetor de Laplace-Runge-Lenz** (às vezes chamado de **vetor de Lenz**), e mostrar que ele *se conserva*. Pela definição:

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} + \frac{r^2 \vec{F}}{\mu} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} + r^2 \vec{a} \quad , \quad \text{com } \vec{F} = \mu \vec{a} \sim r^{-2} \hat{r}$$

- É útil, antes de demonstrar esse teorema, visualizar esse vetor:



# Trajетórias: seções cônicas!

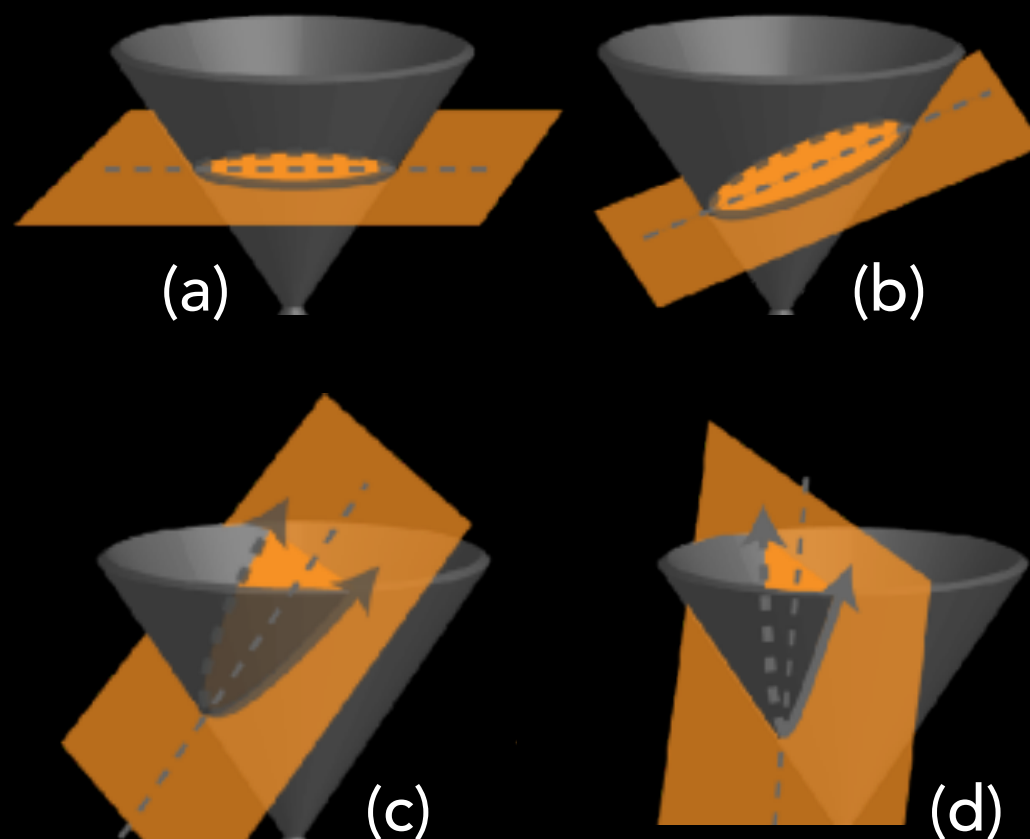
## Teorema (iii)

- Isso não é nada mais, nada menos do que a *equação para seções cônicas*:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad ,$$

onde:

- (a)  $\epsilon = 0$  são círculos
- (b)  $0 < \epsilon < 1$  são elipses
- (c)  $\epsilon = 1$  são parábolas
- (d)  $\epsilon > 1$  são hipérbolas



# Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas:  $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$  ,

onde  $r_0 = \frac{\ell^2}{\mu^2} / (GM)$  e  $\epsilon = \kappa / (GM)$  é a **excentricidade**

(a) Órbita circular ( $\epsilon = 0$ )

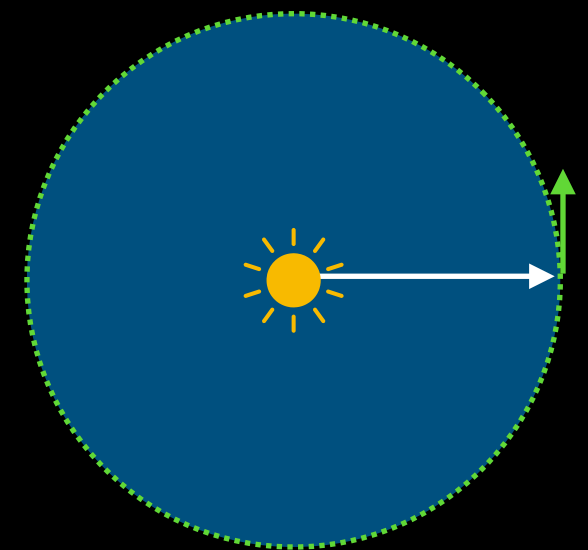
$$r = r_0 \hat{r} \quad , \quad v_0 = \omega_0 r_0$$

$$\vec{a} = -\omega_0^2 r_0 \hat{r} = -\frac{GM}{r_0^2} \hat{r} \quad , \quad GM = \omega_0^2 r_0^3$$

$$\vec{\ell} = r_0 v_0 \mu \hat{z} = \mu \omega_0 r_0^2 \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} - GM \hat{r} = \omega_0^2 r_0^3 \hat{r} - (\omega_0^2 r_0^3 \hat{r}) = 0 !$$

$$\implies r(\varphi) = \frac{(\omega_0 r_0^2)^2 / (\omega_0^2 r_0^3)}{1 + 0 \cos \varphi} = r_0 !$$



# Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas:  $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$ ,

onde  $r_0 = \frac{\ell^2}{\mu^2} / (GM)$  e  $\epsilon = \kappa / (GM)$  é a **excentricidade**

(b) Órbita elíptica ( $0 < \epsilon < 1$ )

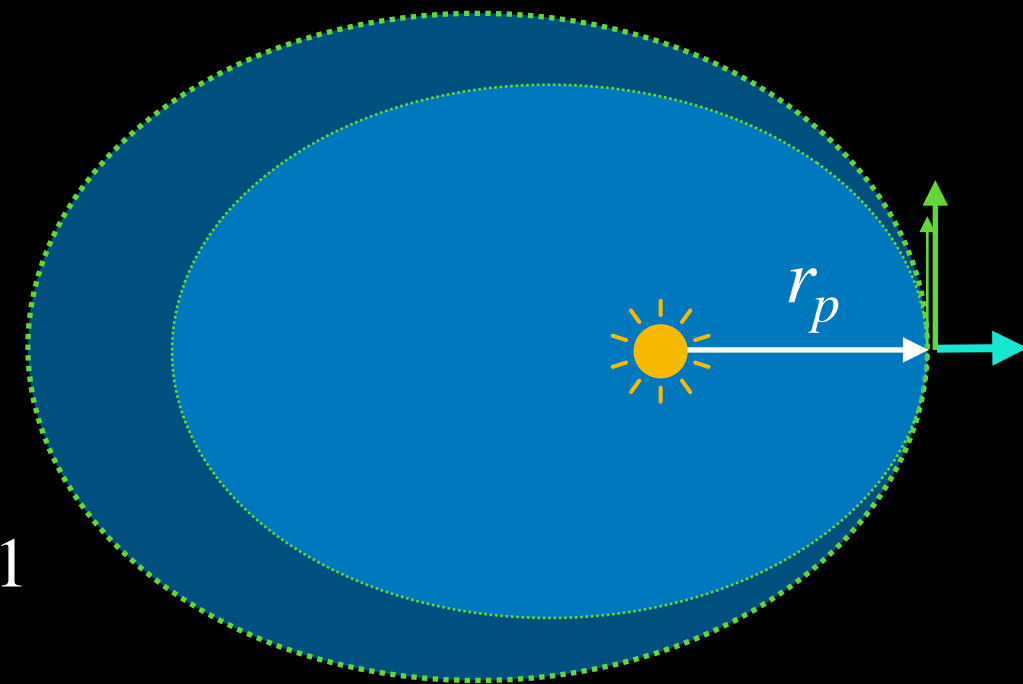
Aqui é útil tomar como referência o periélio:

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = \mu r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i} \quad ,$$

$$r_0 = (\ell / \mu)^2 / (GM) \text{ e portanto } \epsilon = (\ell / \mu)^2 / (r_p GM) - 1$$

$$\implies r(\varphi) = \frac{\ell^2 / \mu^2 GM}{1 + \left( \frac{\ell^2 / \mu^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos \varphi}$$



# Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas:  $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$ ,

onde  $r_0 = (\ell/\mu)^2/(GM)$  e  $\epsilon = \kappa/(GM)$  é a **excentricidade**

(c) Órbita parabólica ( $\epsilon = 1$ )

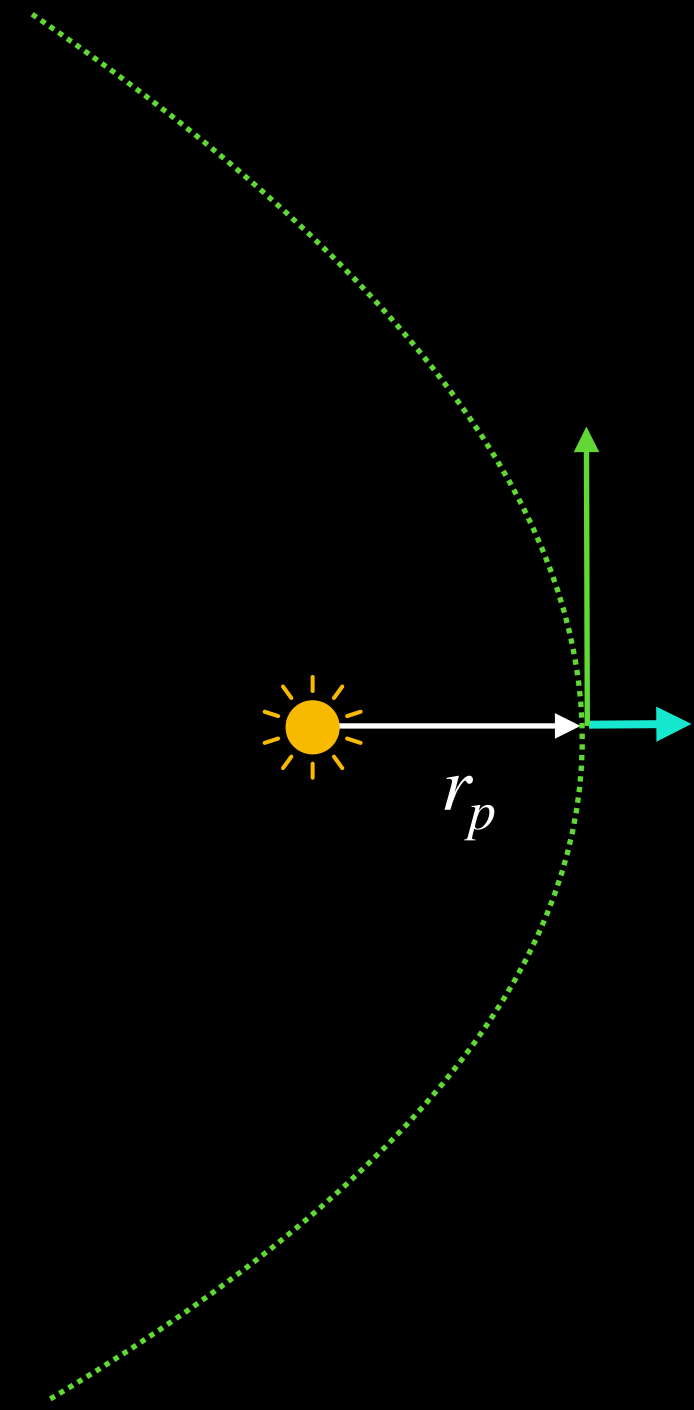
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i} \quad ,$$

$$r_0 = (\ell/\mu)^2/(GM) \quad , \quad \epsilon = (\ell/\mu)^2/(r_p GM) - 1 = 1$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{(\ell/\mu)^2/GM}{1 + \left( \frac{(\ell/\mu)^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos \varphi} = \frac{2 r_p}{1 + \cos \varphi}$$



# Trajетórias: seções cônicas!

- Seções cônicas:  $r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}$ ,

onde  $r_0 = (\ell/\mu)^2/(GM)$  e  $\epsilon = \kappa/(GM)$  é a **excentricidade**

(d) Órbita hiperbólica ( $\epsilon > 1$ )

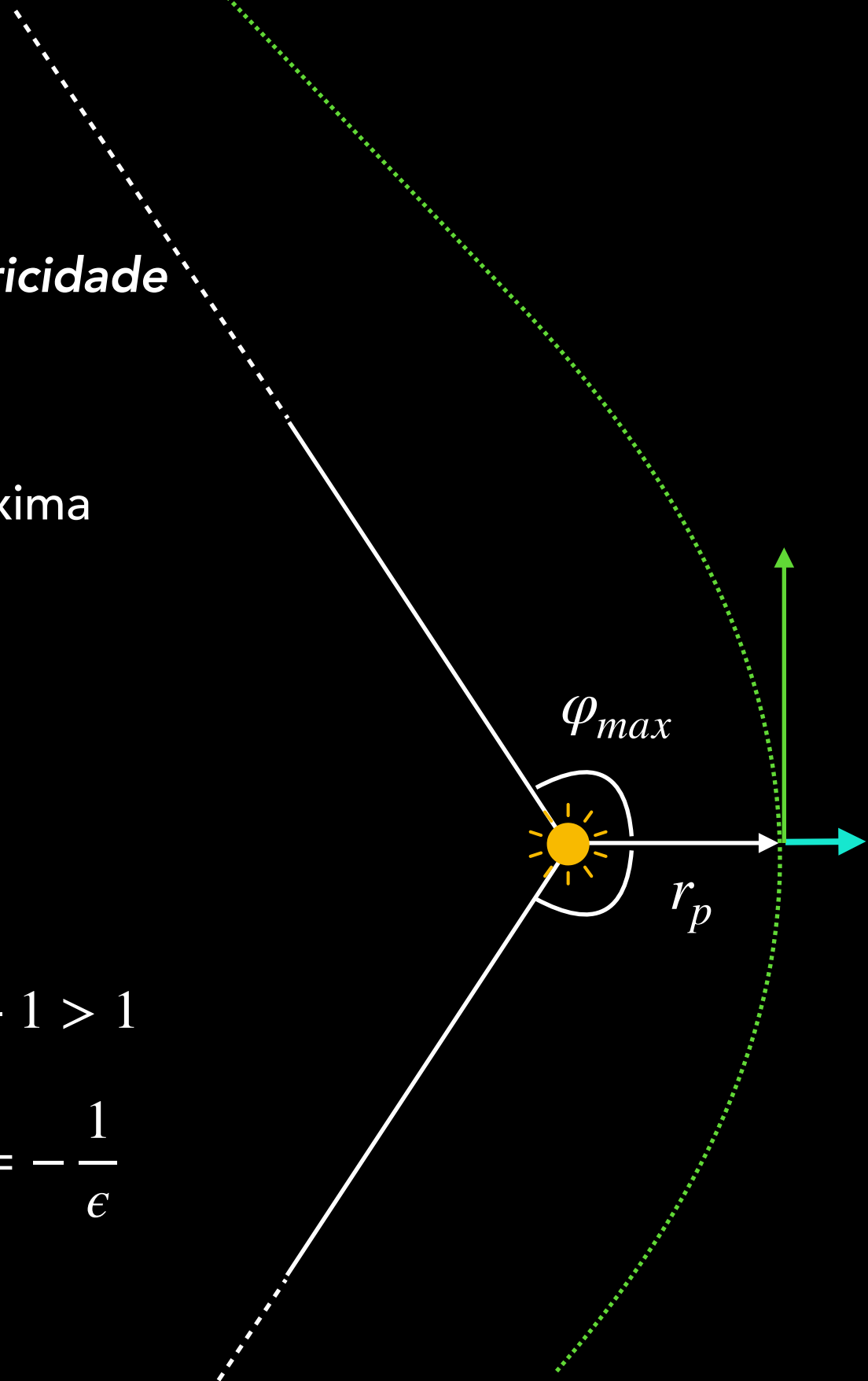
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p v_{max} \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{v} \times \vec{\ell}}{\mu} - GM \hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM \hat{i} \quad ,$$

$r_0 = (\ell/\mu)^2/(GM)$  e portanto  $\epsilon = (\ell/\mu)^2/(r_p GM) - 1 > 1$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{(\ell/\mu)^2/GM}{1 + \left( \frac{(\ell/\mu)^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos \varphi} \quad , \quad \cos \varphi_{max} = -\frac{1}{\epsilon}$$





# A energia potencial e o potencial efetivo

- Agora vamos retornar ao nosso problema das trajetórias e órbitas no contexto da Lei da Gravitação Universal de Newton.
- Nesse caso, podemos nos ater ao *plano da trajetória*, definido como sendo o plano perpendicular ao vetor  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \mu \vec{v}$  — que, lembre-se, pelo Teorema (ii), é conservada.
- Nesse caso a velocidade pode ser decomposta em uma *componente paralela* à posição  $\vec{r}$ , e o movimento na direção *perpendicular*:

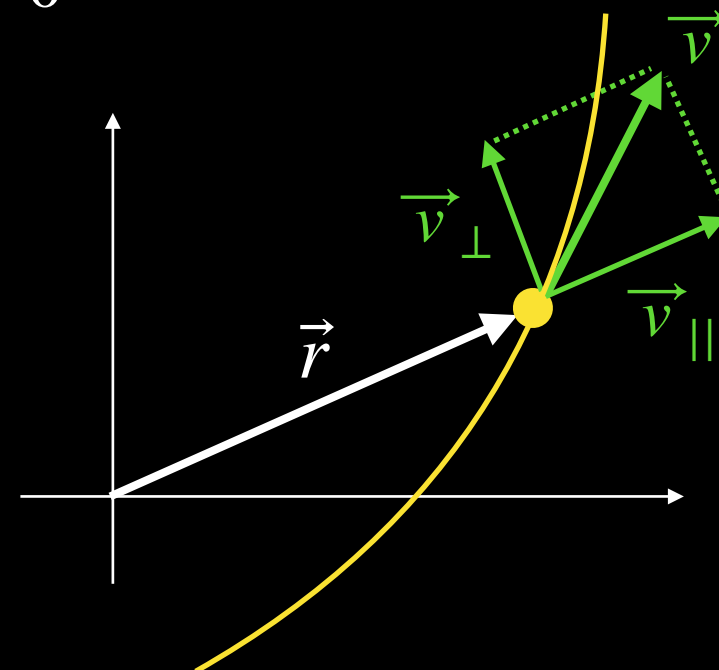
$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{r} + \vec{v}_{\perp}, \quad \text{onde} \quad v_{\parallel} = \dot{r} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \hat{r} = 0$$

- Agora, note que:

$$|\vec{\ell}| = \mu |\vec{r} \times \vec{v}| = \mu r v_{\perp}$$

- Portanto, podemos escrever:

$$\vec{\ell}^2 = \mu^2 r^2 v_{\perp}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\perp}^2 = (\ell / \mu)^2 / r^2$$



# A energia potencial e o potencial efetivo

- Escrevendo então  $v_{\perp}^2 = (\ell/\mu)^2/r^2$  (onde, lembre-se,  $\ell$  é constante), podemos escrever a energia cinética da partícula como:

$$K = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{(\ell/\mu)^2}{r^2}\right)$$

- Agora podemos substituir isso na expressão para a conservação da energia, obtendo:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

$$= K_r + U_{ef}(r) \quad , \quad \text{onde} \quad K_r = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \quad \text{e} \quad U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

- Dado o potencial Newtoniano  $U(r) = -GMm/r$ , temos:

$$U_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

- Reduzimos, assim, um problema em 3D a um problema em 1D (o raio  $r$ ):

# A energia potencial e o potencial efetivo

- O potencial efetivo para as trajetórias e órbitas de partículas são, portanto, determinadas em termos do potencial efetivo para o movimento radial:

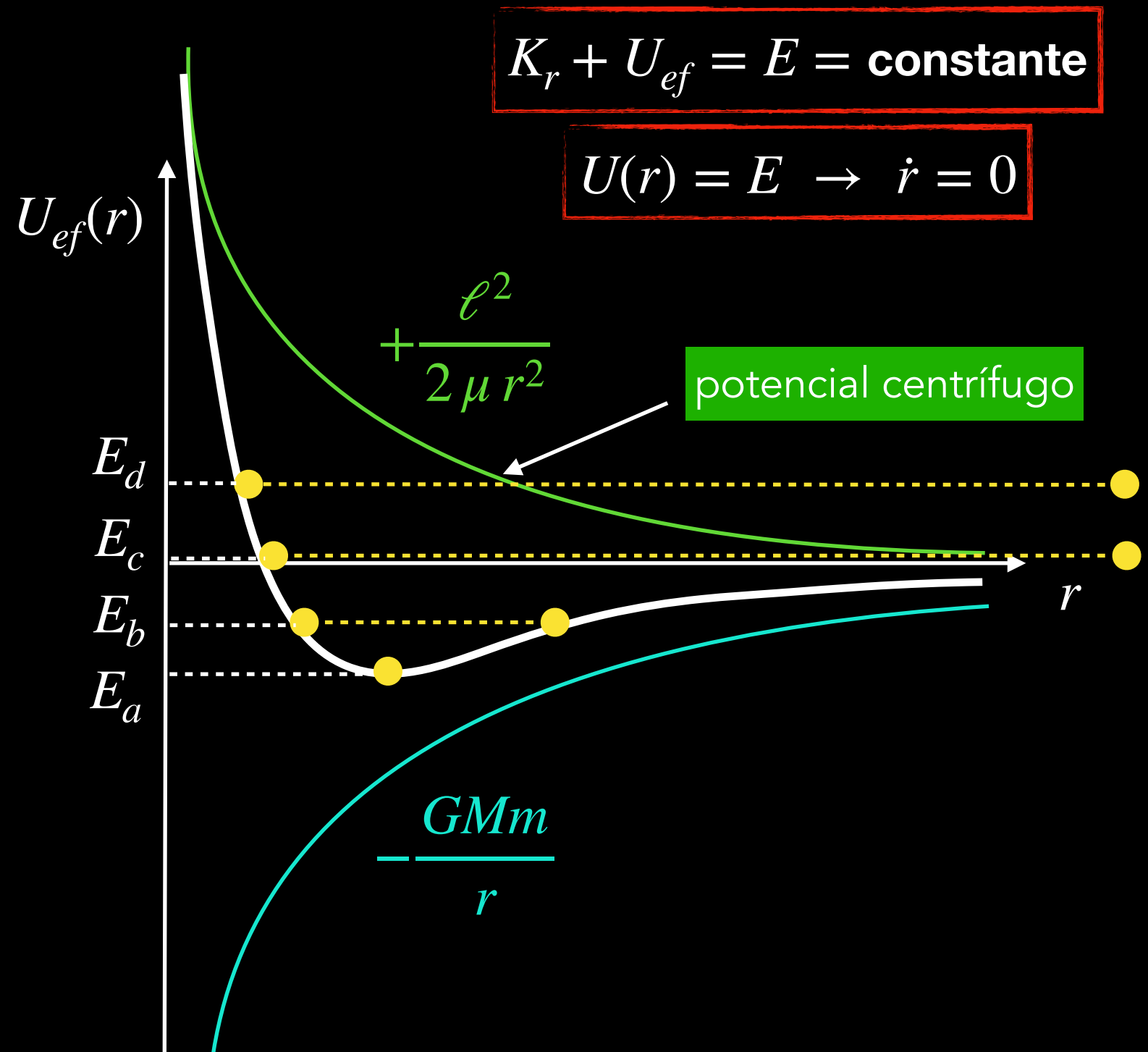
$$U_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

(a) Órbita circular

(b) Órbita elíptica

(c) Trajetória parabólica

(d) Trajetória hiperbólica



## TENSOR DE LEVI-CIVITA

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ ou } (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (2, 1, 3) \text{ ou } (1, 3, 2) \text{ ou } (3, 2, 1) \\ 0 & i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } i=k \end{cases}$$

## TENSOR DELTA DE KRONCKER

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

podemos mostrar que

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2 \delta_{kl}$$

usamos aqui a notação de Einstein, isto é, está sub-entendida a soma em índices repetidos,

com isto podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{x}_i \quad \hat{x}_1 = \hat{i} \quad \hat{x}_2 = \hat{j} \quad \hat{x}_3 = \hat{k}$$

Podemos mostrar algumas igualdades  
agora com facilidade

## - EXEMPLOS -

$$\begin{aligned}\square \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \hat{x}_i \\ &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{k\ell m} b_\ell c_m \hat{x}_i = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m} a_j b_\ell c_m \hat{x}_i \\ &= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) a_j b_\ell c_m \hat{x}_i \\ &= a_m b_j c_m \hat{x}_j - a_\ell b_\ell c_i \hat{x}_i \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \varepsilon_{gki} a_i b_g c_k \\ &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \varepsilon_{kij} a_i b_j c_k = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_\ell d_m \\ &= (\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke}) a_j b_k c_\ell d_m \\ &= a_\ell b_m c_\ell d_m - a_m b_\ell c_\ell d_m \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{d} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$